

Р. ГАБАСОВ  
Ф.М.КУФИЛОВА

✦ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Р. ГАБАСОВ  
Ф.М.КУФИЛОВА

# методы оптимизации

**Р. ГАБАСОВ  
Ф.М.КИРИЛЛОВА**

# **методы оптимизации**

Издание второе,  
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов университетов по специальности 0647 «Прикладная математика»

---

**Минск**

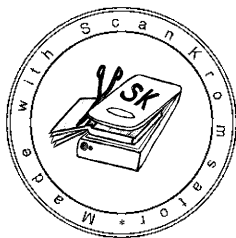
**Издательство БГУ им. В. И. Ленина  
1981**

ББК 22.11  
Г12

УДК 681.513.5:519.3(075.8)

Рецензенты:

кафедра вычислительной математики МГУ им. М. В. Ломоносова,  
Л. А. Растрегин, доктор технических наук



Scan AAW

Г  $\frac{20405-061}{МЗ17-81}$  30—81

1704050000

© Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1981

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава I. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Симплекс-метод . . . . .	9
§ 2. Теория двойственности . . . . .	33
§ 3. Двойственный симплекс-метод . . . . .	46
§ 4. Транспортные задачи . . . . .	59
Литература . . . . .	78
<b>Глава II. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . . . .</b>	<b>78</b>
§ 1. Выпуклые множества и функции . . . . .	79
§ 2. Теорема Куна — Таккера . . . . .	85
§ 3. Теория двойственности . . . . .	93
§ 4. Алгоритм решения квадратичной задачи . . . . .	102
Литература . . . . .	117
<b>Глава III. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . . . .</b>	<b>117</b>
§ 1. Общая задача нелинейного программирования . . . . .	117
§ 2. Задача на безусловный минимум . . . . .	121
§ 3. Задача на условный минимум . . . . .	127
§ 4. Минимизация функций при ограничениях типа неравенств . . . . .	143
§ 5. Негладкие задачи . . . . .	150
§ 6. Векторная оптимизация . . . . .	167
Литература . . . . .	175
<b>Глава IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ . . . . .</b>	<b>175</b>
§ 1. Методы перебора . . . . .	176
§ 2. Минимизация функций одной переменной . . . . .	194
§ 3. Методы безусловной минимизации . . . . .	203
§ 4. Методы условной минимизации . . . . .	217
Литература . . . . .	227
<b>Глава V. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ . . . . .</b>	<b>227</b>
§ 1. Задача распределения ресурсов . . . . .	228
§ 2. Оптимальная по времени обработка деталей на двух станках . . . . .	232
§ 3. Построение кратчайшего пути на сети . . . . .	236

§ 4. Задача о максимальном потоке . . . . .	239
§ 5. Одна задача сетевого планирования . . . . .	240
Литература . . . . .	243
<i>Глава VI. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ . . . . .</i>	<i>243</i>
§ 1. Основная задача вариационного исчисления . . . . .	244
§ 2. Метод вариаций . . . . .	250
§ 3. Исследование второй вариации . . . . .	264
Литература . . . . .	271
<i>Глава VII. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ . . . . .</i>	<i>272</i>
§ 1. Основная задача оптимального управления . . . . .	272
§ 2. Принцип максимума Понтрягина . . . . .	278
§ 3. Условия трансверсальности . . . . .	287
§ 4. Применения принципа максимума . . . . .	300
§ 5. Оптимизация линейных систем . . . . .	311
§ 6. Оптимальное управление дискретными процес- сами . . . . .	325
§ 7. Оптимизация систем с распределенными пара- метрами . . . . .	337
§ 8. Линейные дифференциальные игры . . . . .	341
Литература . . . . .	349

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи оптимизации встречаются в различных сферах человеческой деятельности. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, ибо оно, как правило, выбирается после сравнения с другими вариантами. Интерес к задачам наилучшего выбора был высоким всегда, но особенно возрос в последние годы в связи с интенсивным развитием науки и техники. С одной стороны, людям все чаще и чаще приходится заниматься процессами, для осуществления которых требуется максимально эффективное использование имеющихся средств и ресурсов; с другой стороны, с развитием вычислительной техники резко увеличились возможности воздействия человека на изучаемые процессы. В связи со сложностью современных прикладных задач оптимизации принятие решений в них все в меньшей мере стало основываться лишь на «здравом смысле», интуиции и опыте человека. Стал неизбежным научный подход, базирующийся на математическом моделировании исследуемых задач.

Первые задачи по изучению экстремальных свойств геометрических фигур (круг, квадрат и т. д.) были решены еще в древние века. Мощным толчком к развитию методов оптимизации послужило создание дифференциального и интегрального исчисления. Этот путь уже в XVIII в. привел к возникновению вариационного исчисления. В связи с современной научно-технической революцией теория и практика оптимизации стали развиваться особенно интенсивно. В течение короткого промежутка времени были созданы новые разделы теории (линейное программирование, теория оптимального управления и др.), которые привели к разработке ряда эффективных численных методов решения разнообразных

экстремальных задач, возникающих на практике. Исследования по методам оптимизации непрерывно углубляются, постоянно ширится фронт их приложений.

В данном учебном пособии, написанном в соответствии с действующей программой курса «Методы оптимизации» для специальности 0647, «Прикладная математика», излагаются основные методы, используемые в настоящее время в теоретических и прикладных работах для решения разнообразных задач оптимизации. Главное внимание уделяется принципиальным вопросам методов оптимизации. Детальное описание дается лишь для установившихся, классических, методов. Некоторые приемы, называемые иногда также методами, излагаются на примере конкретных задач как реализации общих принципов.

Второе издание пособия отличается от первого объемом приведенного материала, формой и порядком его изложения. Использован опыт преподавания курса на факультете прикладной математики Белгосуниверситета им. В. И. Ленина, учтены результаты развития методов оптимизации в последние годы.

Изложение начинается с описания классических методов линейного программирования. В первом издании этот материал следовал за общими результатами нелинейного и выпуклого программирования. Теперь он положен в основу курса. Такой порядок изложения позволяет естественным образом состыковать с общим курсом оптимизации лекции по линейному программированию, которые в ряде университетов читаются отдельно. Результаты гл. I существенно и неоднократно используются в дальнейшем при исследовании общих задач оптимизации. Именно найденное здесь компактное и элементарное построение, не использующее дополнительных сведений из теории неравенств и теории выпуклых многогранных множеств, явилось причиной изменения структуры пособия. Симплекс-метод сначала приводится в виде, удобном для реализации на ЭВМ, и лишь потом, при решении примеров, объясняется традиционная табличная форма, которая уже давно не используется в современных машинных программах. Теория двойственности линейного программирования (§ 2) получается из анализа симплекс-метода. Это делает ее в известном смысле конструктивной и позволяет естественным путем ввести двойственный симплекс-метод (§ 3). Во втором издании особо

подчеркивается единство прямого и двойственного симплекс-методов, что в настоящее время характерно для каждого законченного метода оптимизации. По-новому излагаются и методы решения транспортных задач. В основу положена сетевая модель, метод потенциалов решения которой затем приспособливается к матричной форме.

Изложение выпуклого программирования (гл. II) во втором издании опирается главным образом на результаты по линейному программированию. Дополнительно приводится конечный метод решения выпуклых задач квадратичного программирования, который является непосредственным обобщением прямого симплекс-метода.

При изложении теории нелинейного программирования (гл. III) рассматриваются в основном те же вопросы, что и в первом издании, но дается другое их обоснование, использующее результаты гл. I.

Существенно переработан материал по вычислительным методам нелинейного программирования (гл. IV). Добавлены методы перебора. Методы излагаются с единой позиции принципа последовательной аппроксимации. Объясняется сущность и некоторых других методов оптимизации, используемых при решении прикладных задач.

Динамическое программирование (гл. V) в новом издании трактуется как метод решения специальных задач вслед за общими вычислительными методами нелинейного программирования. На примере ряда задач с четким физическим содержанием объясняются основные принципы динамического программирования и различные формы их реализации, учитывающие особенности задач. Приложение динамического программирования к задачам оптимального управления перенесено в гл. VII.

Основные результаты классического вариационного исчисления (гл. VI) дополнены некоторыми новыми, но, как и в первом издании, рассматриваются только условия слабого минимума. Условия сильного минимума (гл. VII) получаются из результатов теории оптимального управления.

Пособие завершается рассмотрением основных вопросов теории оптимального управления (гл. VII). Во втором издании этот материал переработан и дополнен новыми темами, которые получили существенное развитие и приложение лишь в последние годы.

В работе над вторым изданием большую помощь



авторам оказали сотрудники кафедры методов оптимального управления Белгосуниверситета им. В. И. Ленина и лаборатории теории процессов управления ИМ АН БССР: Костюкова О. И. участвовала в разработке § 3 гл. II; § 2—5 гл. V; Ракецкий В. М. участвовал в разработке § 4 гл. II; Кругеру А. Я. принадлежит изложение § 5 гл. III; Гороховик В. В. написал § 3, 8 гл. VII; Глушенков В. С. разработал новое доказательство модификации Блэнда; Гурина Т. Н., Дымков М. П. участвовали в подготовке рукописи к изданию. Указанным товарищам выражаем глубокую признательность.

*Авторы*

## Глава I. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Линейным программированием* называется раздел математики, в котором исследуются задачи оптимизации (задачи на максимум или минимум) линейных функций на множествах, определенных линейными равенствами и неравенствами. Первые задачи линейного программирования были поставлены и изучены в 30-е гг. советским математиком Л. В. Канторовичем. Интенсивное развитие теории и широкое внедрение ее результатов в приложения начались после создания в 40-е гг. американским математиком Дж. Данцигом симплекс-метода.

## § 1. Симплекс-метод

*Симплекс-метод* — основной вычислительный метод линейного программирования.

**1. Каноническая задача. Базисный план.** Классический симплекс-метод разработан для *канонической задачи* линейного программирования, под которой понимается задача максимизации

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

линейной функции по  $n$  переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , удовлетворяющим  $t$  линейным равенствам

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2)$$

$(b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0)$  и  $n$  линейным неравенствам

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

В дальнейшем используется, как правило, векторно-матричная запись. Введем множества индексов  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда совокупность переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  запишется в виде вектора  $x = x(J) = \{x_j, j \in J\}$ . Аналогично:  $c = c(J) = \{c_j, j \in J\}$ ,  $b = b(I) = \{b_i, i \in I\}$ . Совокупность параметров  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$  удобно записать в виде матрицы  $A = A(I, J) = \{a_{ij}, i \in I, j \in J\}$ . Действия над векторами и матрицами будут осуществляться по правилам матричного исчисления. При этом каждый вектор, участвующий в операциях, считается записанным в виде вектора-столбца. Для получения вектора-строки используется оператор транспонирования, обозначаемый символом штрих (' ). Таким образом, скалярное произведение векторов  $c = c(J)$ ,  $x = x(J)$  имеет следующую запись:  $c'x$ . Выражения  $x = 0$ ,  $x \geq 0$  для вектора  $x$  означают совокупности покомпонентных равенств  $x_j = 0$ ,  $j \in J$ , и неравенств  $x_j \geq 0$ ,  $j \in J$ .

В новых обозначениях каноническая задача (1) — (3) имеет компактную запись

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0. \quad (4)$$

Принято вектор  $c$  называть *вектором стоимости* (компоненты  $c_j$  — *коэффициенты стоимости*), вектор  $b$  — *вектором ограничений*, матрицу  $A$  — *матрицей условий* (*матрицей затрат*), столбцы  $a_j = A(I, j)$  — *векторами условий*. Функция  $c'x$  называется *целевой функцией* задачи, равенство

$$Ax = b \quad (5)$$

— *основным ограничением*, неравенство  $x \geq 0$  — *прямым ограничением* канонической задачи.

*Определение 1.* Каждый  $n$ -вектор  $x$ , удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется ее *планом*.

*Определение 2.* План  $x^0$ , являющийся решением задачи (4):

$$c'x^0 = \max c'x, Ax = b, x \geq 0,$$

называется *оптимальным планом*.

В основе симплекс-метода лежит понятие *базисного плана*.

*Определение 3.* План  $x$  называется *базисным*, если  $n - m$  его компонент равны нулю, а остальным компонентам

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m} \quad (6)$$

соответствуют линейно независимые векторы условий

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m}. \quad (7)$$

Множество  $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$  назовем *множеством базисных индексов*;  $J_N = J \setminus J_B$  — *множество небазисных индексов*. Определение 3 эквивалентно следующему: план  $x = x(J)$  — *базисный*, если  $x_N = x(J_N) = 0$ ,  $\det A_B \neq 0$ ,  $A_B = A(I, J_B)$ .

Совокупность (7) называется *базисом* базисного плана, матрица  $A_B$ , составленная из векторов базиса, — *базисная матрица*. Компоненты  $x_j, j \in J_B$ , называются *базисными переменными* плана  $x$ ;  $x_j, j \in J_N$ , — *небазисные переменные*.

**З а м е ч а н и е.** Для базисного плана основное ограничение (5) принимает вид  $A_B x_B = b$ , где  $x_B = x(J_B)$ . Следовательно, базисный план  $x = \{x_B, x_N\}$  можно построить по базисной матрице  $A_B$ :  $x_B = A_B^{-1}b$ ,  $x_N = 0$ . В связи с этим вместо определения 3 можно ввести сначала понятие базисной матрицы, как неособой  $m \times m$ -подматрицы  $A_B$  матрицы  $A$ , удовлетворяющей неравенству  $A_B^{-1}b \geq 0$ , а затем построить базисный план.

**Определение 4.** Базисный план называется *невыврожденным*, если все его базисные переменные (6) положительны:  $x_j > 0, j \in J_B$ .

**2. Формула приращения целевой функции.** Пусть  $x$  — базисный план с базисной матрицей  $A_B = A(I, J_B)$ . Рассмотрим другой (не обязательно базисный) план  $\bar{x} = x + \Delta x$ . Найдем формулу для приращения

$$c' \bar{x} - c' x = c' \Delta x \quad (8)$$

целевой функции.

По предположению,  $Ax = b$ ,  $A\bar{x} = b$ . Следовательно, приращение  $\Delta x = \bar{x} - x$  плана удовлетворяет равенству  $A\Delta x = 0$ , которое в компонентной записи имеет вид

$$A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0, \quad A_N = A(I, J_N), \quad (9)$$

$$\Delta x_B = \Delta x(J_B), \quad \Delta x_N = \Delta x(J_N).$$

Из (9) найдем

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N \quad (10)$$

и результат подставим в (8):

$$c' \Delta x = c'_B \Delta x_B + c'_N \Delta x_N = - (c'_B A_B^{-1} A_N - c'_N) \Delta x_N, \\ c_B = c(J_B). \quad (11)$$

Введем  $m$ -вектор потенциалов  $u = u(I)$ :

$$u' = c'_B A_B^{-1} \quad (12)$$

и  $(n - m)$ -вектор оценок  $\Delta_N = \Delta(J_N)$ :

$$\Delta'_N = u' A_N - c'_N. \quad (13)$$

С учетом (12), (13) из (11) получаем формулу приращения целевой функции:

$$c' \bar{x} - c' x = - \Delta'_N \Delta x_N = - \sum_{j \in J_N} \Delta_j \Delta x_j. \quad (14)$$

Из формулы (14) и общего определения скорости как производной следует физический смысл оценки  $\Delta_j$ :  $\Delta_j$  — взятая с обратным знаком скорость изменения целевой функции в точке  $x$  при увеличении  $j$ -й небазисной переменной базисного плана  $x$ .

**3. Критерий оптимальности.** Пусть  $x$  — базисный план с базисной матрицей  $A_B$ . Первый вопрос, который возникает при решении задачи (4): оптимален ли заданный план? Для плана  $x$  подсчитаем вектор оценок (13).

**Теорема 1 (критерий оптимальности).** Неравенство

$$\Delta(J_N) \geq 0 \quad (15)$$

достаточно, а в случае невырожденности и необходимо для оптимальности базисного плана  $x$ .

**Доказательство. Достаточность.** По определению базисного плана выполняется равенство  $x(J_N) = 0$ . Из прямого ограничения следует, что для любого плана  $\bar{x}$  справедливы соотношения

$$\Delta x(J_N) = \bar{x}(J_N) - x(J_N) = \bar{x}(J_N) \geq 0. \quad (16)$$

Векторы  $\Delta(J_N)$ ,  $\Delta x(J_N)$  из (15), (16) подставим в формулу приращения (14), что приведет к неравенству  $c' \bar{x} - c' x \leq 0$ , которое доказывает оптимальность плана  $x$ .

**Необходимость.** Предположим, что для оптимального

невырожденного базисного плана  $x$ , у которого, по определению,

$$x(J_B) > 0, \quad (17)$$

неравенство (15) не выполняется, т. е. при некотором  $j_0 \in J_H$  оценка  $\Delta_{j_0}$  отрицательна:

$$\Delta_{j_0} < 0. \quad (18)$$

Построим вектор  $\bar{x} = x + \Delta x$ , где  $\Delta x$  определим следующим образом. Небазисные компоненты положим равными:

$$\Delta x_{j_0} = \Theta \geq 0, \quad \Delta x_j = 0, \quad j \neq j_0, \quad j \in J_H. \quad (19)$$

Базисные компоненты найдем из (10):

$$\Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\Theta A_B^{-1} a_{j_0}. \quad (20)$$

Вектор  $\bar{x}$  в силу (9) при любом  $\Theta$  удовлетворяет основному ограничению:  $A\bar{x} = Ax + A\Delta x = Ax = b$ . Из (19) следует, что компонента  $\bar{x}(J_H)$  при всех  $\Theta \geq 0$  удовлетворяет прямому ограничению:

$$\bar{x}(J_H) = x(J_H) + \Delta x(J_H) = \Delta x(J_H) \geq 0. \quad (21)$$

Для компоненты  $\bar{x}(J_B)$  с учетом (20) получаем

$$\bar{x}(J_B) = x(J_B) + \Delta x(J_B) = x(J_B) - \Theta A_B^{-1} a_{j_0}. \quad (22)$$

Ясно, что при выполнении (17) найдется такое достаточно малое число  $\Theta > 0$ , что  $\bar{x}(J_B) \geq 0$ . Таким образом, при указанном  $\Theta$  вектор  $\bar{x}$  является планом задачи (4). Подстановка (18), (19) в формулу приращения (14) приводит к неравенству

$$c'\bar{x} - c'x = -\Theta \Delta_{j_0} > 0, \quad (23)$$

которое противоречит оптимальности плана  $x$ . Теорема доказана.

**4. Достаточное условие неразрешимости задачи.** Предположим, что на рассматриваемом базисном плане  $x$  критерий оптимальности (15) не выполняется, т. е. при некотором  $j_0 \in J_H$  оценка  $\Delta_{j_0}$  отрицательна (см. (18)). Рассмотрим случай, когда компоненты  $x_{jj_0}$ ,  $j \in J_B$ , вектора  $A_B^{-1} a_{j_0}$  неположительны:

$$x_{jj_0} \leq 0, \quad j \in J_B. \quad (24)$$

В этом случае согласно (22) компонента  $\bar{x}(J_B)$  неотрицательна при всех  $\Theta \geq 0$ , т. е. вектор  $\bar{x} = \{\bar{x}(J_B), \bar{x}(J_N)\}$  — план задачи (4) при любых  $\Theta \geq 0$ . Из (23) видно, что с увеличением  $\Theta$  значение целевой функции на плане  $\bar{x}$  неограниченно возрастает. Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Если среди оценок базисного плана  $x$  существует отрицательная ( $\Delta_{j_0} < 0$ ) и ей соответствует вектор  $A_B^{-1} a_{j_0}$  с неположительными компонентами, то целевая функция задачи (4) неограниченно возрастает при увеличении переменной  $x_{j_0}$  базисного плана  $x$ .

**5. Итерация.** Продолжим анализ базисного плана  $x$  с базисной матрицей  $A_B$ . Рассмотрим случай, когда ни для какой отрицательной оценки  $\Delta_{j_0}$  не выполняются неравенства (24). Из (23) видно, что при выполнении (18) увеличение  $\Theta$  в (19) ведет к возрастанию целевой функции. Поэтому с точки зрения задачи (4) целесообразно выбрать максимально допустимое значение  $\Theta$ . Из формулы (22), которая в компонентной записи имеет вид  $\bar{x}_j = x_j - \Theta x_{jj_0}$ ,  $j \in J_B$ , следует, что при увеличении  $\Theta$  хотя бы одна компонента вектора  $\bar{x}(J_B)$  станет отрицательной. Через нуль пройдут те и только те компоненты  $\bar{x}_j$ , которым соответствуют положительные  $x_{jj_0}$ , а для  $\bar{x}_j$  это, очевидно, произойдет при

$$\Theta = \Theta_j = x_j / x_{jj_0}. \quad (25)$$

Если  $\Theta \leq \min \Theta_j$ ,  $x_{jj_0} > 0$ , то все числа (25) неотрицательны и вектор  $\bar{x} = \{\bar{x}(J_B), \bar{x}(J_N)\}$  — план задачи (4). При  $\Theta > \min \Theta_j$ ,  $x_{jj_0} > 0$ , у вектора  $\bar{x}$  найдутся отрицательные компоненты. Следовательно, наибольшее  $\Theta^0$ , при котором вектор  $\bar{x} = x + \Delta x$  остается планом, равно

$$\Theta^0 = \Theta_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \min_{\substack{x_{jj_0} > 0, \\ j \in J_B}} \frac{x_j}{x_{jj_0}}. \quad (26)$$

Если базисный план  $x$  невырожденный (т. е.  $x_j > 0$ ,  $j \in J_B$ ), то

$$\Theta^0 > 0. \quad (27)$$

Заменим базисный план  $x$  на новый план  $\bar{x} = x + \Delta x$ , где  $\Delta x$  — вектор с компонентами (19), (20), в котором  $\Theta = \Theta^0$ . При этом согласно (23) целевая функция возрастет на величину  $-\Delta_{j_0} \Theta^0 \geq 0$ , которая в силу (18), (27)

будет положительной, если исходный план  $x$  был невырожденным.

Покажем, что  $\bar{x}$  — базисный план. Среди компонент  $\bar{x}_j$ ,  $j \in J_N$ , только одна компонента  $\bar{x}_{j_0} = \Theta^0$  может оказаться положительной. С другой стороны, среди компонент  $\bar{x}_j$ ,  $j \in J_B$ , одна компонента  $\bar{x}_{i_0}$  обязательно равна нулю, ибо согласно (25), (26)

$$\bar{x}_{i_0} = x_{i_0} - \Theta^0 x_{i_0 j_0} = x_{i_0} - x_{i_0} \cdot x_{i_0 j_0} / x_{i_0 j_0} = 0.$$

Таким образом,  $n - m$  переменных

$$\bar{x}_j, j \in \bar{J}_N, \bar{J}_N = (J_N \setminus j_0) \cup i_0,$$

плана  $\bar{x}$  равны нулю. Остальным переменным  $\bar{x}_j$ ,  $j \in \bar{J}_B$ ,  $\bar{J}_B = (J_B \setminus i_0) \cup j_0$ , соответствуют векторы условий

$$a_j, j \in \bar{J}_B. \quad (28)$$

Обозначим через  $u_{ij}$ ,  $i \in J_B$ ,  $j \in I$ , элементы матрицы  $A_B^{-1}$ . По определению,  $j$ -й столбец матрицы  $A_B^{-1}$  состоит из коэффициентов разложения единичного вектора  $e_j = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$  по столбцам матрицы  $A_B = \{a_i, i \in J_B\}$ :

$$\sum_{i \in J_B} a_i u_{ij} = e_j, \quad j \in I. \quad (29)$$

Запишем разложение вектора  $a_{j_0}$  в базисе (7):

$$\sum_{i \in J_B} a_i x_{i j_0} = a_{j_0}. \quad (30)$$

По построению (26), число  $x_{i_0 j_0}$  положительно. Поэтому из (30) можно найти

$$a_{i_0} = \frac{1}{x_{i_0 j_0}} a_{j_0} - \sum_{i \in J_B \setminus i_0} a_i \frac{x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}}. \quad (31)$$

Подставим (31) в (29):

$$\frac{u_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}} a_{j_0} + \sum_{i \in J_B \setminus i_0} a_i \left( u_{ij} - \frac{u_{i_0 j} x_{i j_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) = e_j, \quad j \in I.$$

Последние равенства доказывают, что векторы (28) линейно независимы, а элементы  $\bar{u}_{ij}$ ,  $i \in \bar{J}_B$ ,  $j \in I$ , матрицы



$\bar{A}_B^{-1}$ , обратной к новой базисной матрице  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ , равны

$$\bar{u}_{j_0 j} = u_{i_0 j} / x_{i_0 j_0}, \quad j \in I, \quad (32)$$

$$\bar{u}_{ij} = u_{ij} - x_{ij_0} \cdot u_{i_0 j} / x_{i_0 j_0}, \quad i \neq j_0, \quad i \in \bar{J}_B, \quad j \in I.$$

Таким образом,  $\bar{x}$  — базисный план с базисной матрицей  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ ,  $\bar{J}_B = (J_B \setminus i_0) \cup j_0$ .

Описанный переход  $x \rightarrow \bar{x}$  от старого базисного плана  $x$  к новому базисному плану  $\bar{x}$  называется *симплексной итерацией*. Из приведенных выкладок следует, что итерацию можно осуществлять с помощью конечного числа операций на ЭВМ.

**З а м е ч а н и е.** Выше итерация начиналась с произвольной отрицательной оценки  $\Delta_{j_0}$ . При небольшом числе  $|J_B|$  небазисных переменных часто рекомендуется следующее правило выбора:

$$\Delta_{j_0} = \min \Delta_j, \quad j \in J_B. \quad (33)$$

Если  $|J_B|$  — большое число, то правило (33) может оказаться трудоемким. Существуют другие правила выбора  $\Delta_{j_0}$ .

Последовательное преобразование базисного плана с помощью симплексных итераций называется симплекс-методом линейного программирования.

**6. Алгоритм. Мультипликативный метод.** В вычислениях пп. 2 — 5 основную роль играет матрица  $A_B^{-1}$ , обратная к базисной. Поэтому процедуру решения задачи (4) (алгоритм) опишем в терминах  $A_B^{-1}$ .

На первой итерации известна начальная обратная матрица  $A_B^{-1}$ .

Пусть на  $k$ -й итерации известна матрица  $(A_B^{-1})_k = [A(I, J_B^k)]^{-1}_k$ . Матрице  $(A_B^{-1})_k$  соответствует базисный план  $x = \{x(J_B^k) = (A_B^{-1})_k b, x(J_N^k) = 0\}$ ,  $J_N^k = J \setminus J_B^k$ .

1) Вычислим вектор  $u'(I) = c'(J_B^k) (A_B^{-1})_k$ .

2) Вычислим оценки  $\Delta_j = u'(I) A(I, j) - c_j$ ,  $j \in J_N^k$ .

3) Если среди оценок  $\Delta_j$ ,  $j \in J_N^k$ , нет отрицательных, то процесс решения задачи заканчивается на оптимальном плане  $x$ .

4) Если в множестве  $\Delta_j$ ,  $j \in J_N^k$ , имеются отрицательные оценки, то среди них выберем  $\Delta_{j_0} < 0$ ,  $j_0 = j_0(k)$ .

5) Вычислим компоненты  $x_{ji_0}$  вектора  $(A_B^{-1})_k A(I, j_0)$ ,  $j \in J_B^k$ .

6) Если среди чисел  $x_{jj_0}$ ,  $j \in J_B^k$ , нет положительных, то процесс решения задачи заканчивается: целевая функция неограниченно возрастает при увеличении  $j_0$ -й компоненты плана  $x$ .

7) Для каждого положительного числа  $x_{jj_0}$ ,  $j \in J_B^k$ , вычислим числа  $\Theta_j = x_j / x_{jj_0}$  и среди них запомним наименьшее  $\Theta^0 = \Theta_{i_0}$ ,  $i_0 = i_0(k)$ .

8) Множества  $J_B^k$ ,  $J_H^k$  заменим на новые  $J_B^{k+1} = (J_B^k \setminus i_0) \cup \{j_0\}$ ;  $J_H^{k+1} = (J_H^k \setminus j_0) \cup i_0$  и по формулам (32) вычислим элементы  $\bar{u}_{ij}$ ,  $i \in \bar{J}_B$ ,  $j \in I$ , матрицы  $(A_B^{-1})_{k+1}$ , считая в (32), что  $J_B = J_B^k$ ;  $u_{ij}$ ,  $i \in J_B^k$ ,  $j \in I$ , — элементы матрицы  $(A_B^{-1})_k$ . На этом  $k$ -я итерация завершается.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.1.

В описанном алгоритме на каждой итерации пересчитывается  $m \times m$ -матрица  $A_B^{-1}$ . В программах для ЭВМ широко используется другая реализация симплекс-метода, называемая *мультипликативным методом*. Она основана на том, что две матрицы  $(A_B^{-1})_{k+1}$ ,  $(A_B^{-1})_k$  связаны в силу (32) простым равенством

$$(A_B^{-1})_{k+1} = D_k (A_B^{-1})_k, \quad (34)$$

где  $D_k = D_k(\bar{J}_B, J_B) = \left\{ d_{ij} \right\}_{i \in \bar{J}_B, j \in J_B}$ :  $d_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $d_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $j \neq i_0$ ;  $d_{ii_0} = -x_{ij_0}/x_{i_0 j_0}$ ,  $i \in \bar{J}_B \setminus j_0$ ,  $i \neq j_0$ ;  $d_{j_0 i_0} = 1/x_{i_0 j_0}$ .

Если  $J_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = i_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}$ ,  $\bar{J}_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}$ , т. е. если в множестве  $\bar{J}_B$  индекс  $j_0$  занимает то же место, что и индекс  $i_0$  в  $J_B$ , то матрица  $D_k$  отличается от единичной диагональной матрицы лишь  $i_0$ -м столбцом и имеет вид

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_1 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_{i_2 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_m j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \dots j_0. \quad (35)$$

$\vdots$   
 $i_0$

Поскольку начальная матрица  $A_B^{-1}$  (см. далее п. 9), как правило, единичная, то из (34) получаем

$$(A_B^{-1})_{k+1} = D_k D_{k-1} \dots D_1. \quad (36)$$

Мультипликативное представление (36) обратной матрицы позволяет не пересчитывать  $m \times m$ -матрицы  $(A_B^{-1})_k$ ,

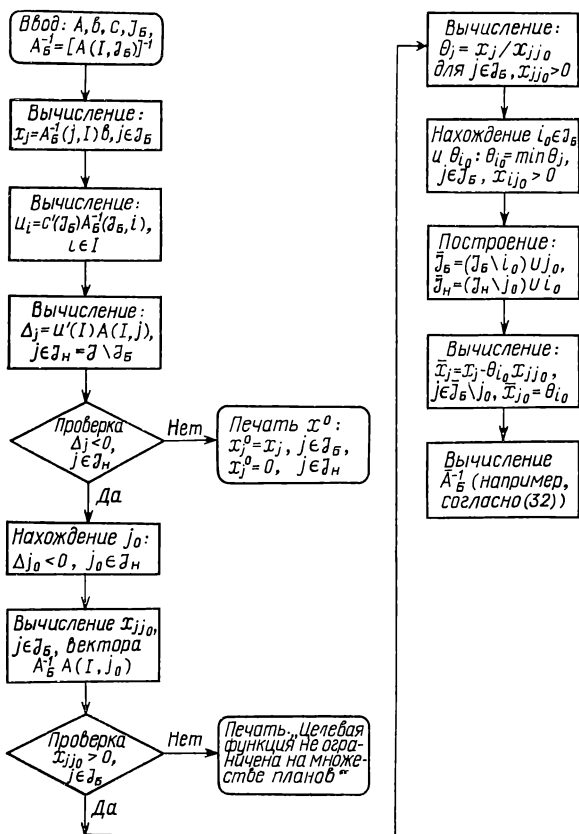


Рис. 1.1

а добавлять к прежней информации совокупность только из  $m + 1$  числа (номер и элементы  $i_0$ -го столбца). Во избежание накопления ошибок округления через определенное число итераций обратная матрица обновляется, после чего

вновь вычисляются множители (35). В последние годы стали использоваться представления обратной матрицы, которые отличаются от (36).

**7. Геометрическая интерпретация. Геометрический метод.** Множество, образованное пересечением конечной совокупности полупространств и гиперплоскостей, называют многогранным. На рис. 1.2 изображены два многогранных множества в  $R_2, R_3$ :  $X_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ,  $X_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ .

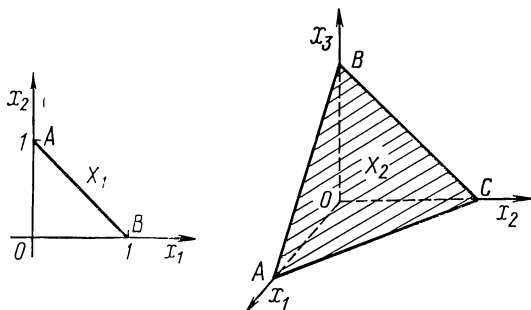


Рис. 1.2

$x_3 \geq 0\}$ . Следовательно, множество планов задачи линейного программирования — *многогранное*. Базисному плану в многогранном множестве соответствует *крайняя (угловая) точка (вершина)*, т. е. такая, которую невозможно включить в середину никакого ненулевого прямолинейного отрезка, целиком принадлежащего множеству. Крайними точками множеств  $X_1, X_2$  (рис. 1.2) являются  $A, B, C$ . Симплексная итерация соответствует переходу от одной крайней точки к такой соседней крайней точке вдоль ребра, соединяющего эти точки, в которой значение целевой функции не меньше, чем в старой точке. Симплекс-метод — это направленное движение вдоль ребер множества планов, при котором исключаются те ребра, вдоль которых целевая функция не возрастает. Свое название симплекс-метод получил по структуре множества планов, которое в первых решенных задачах имело вид множеств  $X_1, X_2$  (рис. 1.2), называемых *симплексами*.

При  $n=2$  и любом  $m$  на плоскости  $\{x_1, x_2\}$  легко графически построить множество вида  $X = \{x : a'_i x \leq b_i, i = \overline{1, m}; x = \{x_1, x_2\} \geq 0\}$ .

С помощью анализа линий уровня функции  $c'x$  нетрудно найти решение задачи  $c'x \rightarrow \max, x \in X$ . В этом состоит геометрический метод решения задач линейного программирования. Для  $n=3$  его реализация затруднительна и совсем не используется, если  $n > 3, m > 3$ .

**8. Конечность симплекс-алгоритма.** Алгоритм (и соответствующий ему метод) решения задачи оптимизации называется конечным, если его реализация на ЭВМ позволяет за конечное число операций (конечное время) построить оптимальный план. Поскольку каждая

симплексная итерация содержит конечное число операций ЭВМ, то для доказательства конечности симплекс-алгоритма достаточно показать конечность его итераций.

Каноническую задачу линейного программирования называют невырожденной, если не вырождены все ее базисные планы.

**Теорема 3.** Для каждой имеющей решение невырожденной задачи (4) и начального базисного плана симплекс-алгоритм конечен.

**Доказательство.** Пусть  $x^1$  — произвольный базисный план. В результате симплексных итераций строятся последовательности  $x^k$ ,  $A_B^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , базисных планов и матриц. В силу невырожденности  $x^k$  на каждой итерации  $x^k \rightarrow x^{k+1}$  целевая функция  $c'x$  возрастает. Поскольку  $c'x^k = c'(J_B^k)x(J_B^k) = a c'(J_B^k)(A_B^{-1})_k b$ , то в процессе итераций ни одна базисная матрица не может встретиться дважды. Матрица условий  $A$  содержит лишь конечное число базисных матриц. Следовательно, через конечное число итераций будет построен базисный план  $x^{k_0}$ ,  $k_0 < \infty$ , для которого выполняется критерий оптимальности. Теорема доказана.

В вырожденных задачах (4) на некоторых итерациях с вырожденными базисными планами значение целевой функции вследствие того, что  $\Theta^0 = 0$ , может не измениться. Если эта ситуация повторится подряд несколько раз, появляется опасность возвращения к уже использованной базисной матрице. Существуют примеры, в которых это явление наблюдается. Оно называется *зацикливанием*. Понятно, что в случае зацикливания симплекс-алгоритм не является конечным. Построены специальные модификации симплекс-алгоритма, в которых исключается возможность повторения базисных матриц. Эти конечные модификации в программах ЭВМ, как правило, не используются, так как зацикливание — очень редкое явление, его трудно реализовать на ЭВМ и при решении практических задач оно, как утверждают специалисты, не наблюдалось. Природа вырожденных задач такова, что существует множество сколь угодно малых вариаций параметров задачи, после которых задача становится невырожденной. Поскольку влияние ошибок округления, неизбежных при решении на ЭВМ большинства практических задач, в некотором смысле эквивалентно вариации параметров, можно считать, что описанный в пп. 3—6 симплекс-метод — конечный метод решения любой канонической задачи линейного программирования.

Приведем предложенную Блэндом конечную модификацию симплекс-метода, в которой  $j_0$  — минимальный индекс среди индексов  $j \in J_N$  оценок  $\Delta_j$ , не удовлетворяющих критерию оптимальности (15);  $i_0$  — минимальный индекс среди индексов  $i_0 \in J_B$  чисел  $\Theta_{i_0}$ , на которых реализуется максимально допустимый шаг  $\Theta^0$  (см. (26)).

Предположим, что в модификации Блэнда возник цикл, т. е. после конечного числа итераций с нулевым шагом повторился базисный план. Пусть  $T_B$  — множество индексов, которые в течение цикла являются базисными постоянно;  $T_0$  — множество индексов, которые в течение цикла являются то базисными, то небазисными;  $T_N$  — множество индексов, которые в течение цикла являются небазисными постоянно;  $t$  — максимальный индекс из множества  $T_0$ . Обозначим через  $\Delta^p$  вектор оценок на  $p$ -й итерации цикла, когда  $j_0^p = t$ , т. е.  $t$  становится базисным; через  $l^q$  направление изменения плана ( $\Delta x = \Theta l$ ) на  $q$ -й итерации цикла, когда  $i_0^q = t$ , т. е.  $t$  становится небазисным;

$l_{j_0}^q = 1, \Delta_{j_0}^q < 0$ . Из определения множеств  $T_B, T_H$  следует, что  $\Delta^p(T_B) = 0, l^q(T_H) = 0$ . Поскольку  $t$  — максимальный индекс из  $T_0$  и  $j_0^p = t$ , то  $\Delta^p(T_0 \setminus t) \geq 0$ . В течение цикла  $x(T_0) = 0$  и  $i_0^q = t$ . Поэтому  $l^q(T_0 \setminus t) \geq 0$ . С учетом  $\Delta = A'u - c, Al^q = 0$  получаем  $\Delta^{p'} l^q = \Delta_{j_0}^q l_{j_0}^q < 0$ . С другой стороны:  $\Delta^{p'} l^q = \Delta^{p'}(T_B) l^q(T_B) + \Delta_{t'}^p l_{t'}^q + \Delta^{p'}(T_H) l^q(T_H) + \Delta^{p'}(T_0 \setminus t) l^q(T_0 \setminus t) = \Delta_{t'}^p l_{t'}^q + \Delta^{p'}(T_0 \setminus t) \times \times l^q(T_0 \setminus t) \geq 0$ . Противоречие доказывает конечность модификации Блэнда.

Можно построить специальные примеры, для которых симплекс-метод сводится к перебору всех базисных планов, однако огромная практика применения симплекс-метода к решению реальных задач показывает, что количество итераций не превосходит, как правило, числа  $2m$ . Это очень хорошая характеристика метода, ибо количество базисных планов задачи может достигать числа  $C_n^m$  сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ .

**9. Первая фаза.** Рассмотрим задачу (4) без следующих свойств, на которых были основаны приведенные выше построения: 1)  $\text{rank } A = m$ ; 2) ограничения задачи не противоречивы; 3) известен начальный базисный план.

По параметрам задачи (4) построим вспомогательную задачу

$$-e'x_u \rightarrow \max, Ax + x_u = b, x \geq 0, x_u \geq 0, \quad (37)$$

в которой  $x_u = x(J_u), J_u = \{n+1, \dots, n+m\}$  —  $m$ -вектор искусственных переменных;  $e = \{1, 1, \dots, 1\}$  —  $m$ -вектор из единиц.

**Лемма.** Для непустоты множества планов исходной задачи (4) необходимо и достаточно, чтобы в решении  $\{x^*, x_u^*\}$  задачи (37) равнялась нулю компонента  $x_u^*$ .

**Доказательство. Необходимость.** Если  $x^*$  — план задачи (4), то  $\{x^*, x_u^* = 0\}$  — решение задачи (37), ибо этот вектор удовлетворяет всем ограничениям (37), на нем  $-e'x_u^* = 0$ , а на любом другом плане  $\{x, x_u\}$  задачи (37) выполняется неравенство  $-e'x_u \leq 0$ .

**Достаточность.** Очевидно: если  $\{x^*, x_u^* = 0\}$  — решение задачи (37), то  $x^*$  — план задачи (4). Лемма доказана.

Для задачи (37) начальный базисный план строится просто. Положим:  $x(J) = 0, x(J_u) = b$ . Тогда вектор  $\{x(J), x(J_u)\}$  будет удовлетворять всем ограничениям задачи

(37), иметь  $n$  нулевых компонент  $x_j$ ,  $j \in J$ , которых на  $m$  основных ограничений меньше, чем  $n + m$  переменных  $x_j$ ,  $j \in J \cup J_u$ , причем компонентам  $x_j$ ,  $j \in J_u$ , будут соответствовать линейно независимые (*искусственные*) векторы условий

$$a_j = e_{j-n}, \quad j \in J_u,$$

составляющие единичную диагональную базисную матрицу.

Решение задачи (37) симплекс-методом называется *первой фазой симплекс-метода* решения задачи (4), а сама задача (37) — *задачей первой фазы*.

После первой фазы симплекс-метода будут построены оптимальные базисные план  $\{x^*, x_u^*\}$  и матрица  $A_B^*$  задачи (37), обладающие одним из следующих трех свойств: а)  $x_u^* \neq 0$ ; б)  $x_u^* = 0$ , базисная матрица  $A_B^*$  состоит из векторов условий исходной задачи, т. е.  $A_B^* = A(I, J_B^*)$ ,  $J_B^* \cap J_u = \emptyset$ ; в)  $x_u^* = 0$ , в базисной матрице  $A_B^*$  имеются искусственные векторы условий, т. е.  $J_B^* \cap J_u \neq \emptyset$ .

Проанализируем каждый из перечисленных случаев.

а) Если  $x_u^* \neq 0$ , то согласно лемме ограничения исходной задачи противоречивы. Процесс решения задачи (4) прекращается.

б) В этом случае  $x^*$  — базисный план задачи (4) с базисной матрицей  $A_B^*$ . Он берется в качестве начального базисного плана исходной задачи (4) и к нему применяется симплекс-метод. Этот этап называется *второй фазой симплекс-метода*, а вся описанная процедура — *двухфазным симплекс-методом* решения задачи (4).

в) Обозначим через  $x_{i_*}^* = 0$ ,  $i_* \in J_u \cap J_B^*$ , искусственную базисную переменную решения  $\{x^*, x_u^* = 0\}$  задачи (37). Для каждого  $j \in J$ ,  $j \notin J_B^*$ , подсчитаем  $i_*$ -ю компоненту  $x_{i_*j}$  вектора  $(A_B^*)^{-1} a_j$ . Если  $x_{i_*j_*} \neq 0$  при некотором  $j_* \in J$ , то элемент  $i_*$  удаляем из  $J_B^*$  и  $J_u$ , переменную  $x_{i_*}$  — из задачи (37) и в  $J_B^*$  вместо  $i_*$  вводим  $j_*$ . Если  $x_{i_*j} \equiv 0$ ,  $j \in J$ ,  $j \notin J_B^*$ , то это означает, что все векторы условий исходной задачи ортогональны единичному вектору  $e_{i_*-n}$ , т. е.  $(i_* - n)$ -е равенство из основных ограничений есть следствие других равенств задачи. Из множества  $I$  удалим элемент  $i_* - n$ , из матрицы  $A$  строку  $A(i_* - n, J)$ , из матрицы  $A_B^*$  строку  $i_*$  и столбец  $a_{i_*} = e_{i_*-n}$ . Размер  $m$

задачи (37) уменьшится на единицу. Матрица, обратная к уменьшенной базисной, получается из старой обратной матрицы  $(A_B^*)^{-1}$  вычеркиванием  $i_*$ -й строки и  $(i_* - n)$ -го столбца и имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{A}_B^{*-1} &= [A(I \setminus (i_* - n), J_B^* \setminus i_*)]^{-1} = \\ &= A_B^{*-1}(J_B^* \setminus i_*, I \setminus (i_* - n)).\end{aligned}$$

Действительно, представим матрицу  $A_B^*$  в виде

$$A_B^* = \left[ \begin{array}{c|c} A(I \setminus (i_* - n), J_B^* \setminus i_*) & 0(I \setminus (i_* - n), i_*) \\ \hline A(i_* - n, J_B^* \setminus i_*) & E(i_* - n, i_*) \end{array} \right],$$

где  $0(I \setminus (i_* - n), i_*)$  — нулевой вектор,  $E(i_* - n, i_*) = 1$ . Тогда матрица, обратная к  $A_B^*$ , примет вид

$$A_B^{*-1} = \left[ \begin{array}{c|c} [A(I \setminus (i_* - n), J_B^* \setminus i_*)]^{-1} & 0 \\ \hline -E(i_*, i_* - n) A(i_* - n, J_B^* \setminus i_*) [A(I \setminus (i_* - n), J_B^* \setminus i_*)]^{-1} & E(i_*, i_* - n) \end{array} \right].$$

Следовательно, матрица, обратная к уменьшенной базисной матрице  $A(I \setminus (i_* - n), J_B^* \setminus i_*) = \bar{A}_B^*$ , получается из старой обратной матрицы вычеркиванием  $i_*$ -й строки и  $(i_* - n)$ -го столбца.

Перебрав все нулевые искусственные базисные переменные, построим базисную матрицу  $\bar{A}_B^*$  задачи (37) без искусственных векторов условий. При этом из основных ограничений будут удалены все линейно зависимые равенства. Из базисного плана  $x^*$  с базисной матрицей  $\bar{A}_B^*$  начинаем вторую фазу симплекс-метода (см. случай б)).

Таким образом, двухфазный симплекс-метод позволяет для любой канонической задачи (4): 1) обнаружить противоречивость ограничений, или 2) исключить линейно зависимые равенства в основных ограничениях, или 3) установить неограниченность сверху целевой функции на множестве планов, или 4) построить оптимальный план.

**10. Два свойства канонической задачи.** Из симплекс-алгоритма следуют два важных свойства канонической задачи, которые в свое время сыграли большую роль при создании симплекс-метода, а теперь часто используются при его обосновании.



**Теорема 4.** Если каноническая задача имеет планы, то среди них есть и базисные.

**Теорема 5.** Среди оптимальных планов канонической задачи существуют базисные планы.

**Доказательство** теорем. Пусть множество планов задачи (4) непусто. Тогда первая фаза симплекс-метода приведет к случаю б) или к случаю в), каждый из которых завершается построением базисного плана исходной задачи. Теорема 4 доказана. Теорема 5 следует из того, что, как отмечено в п. 9, двухфазный симплекс-метод в задачах, имеющих решение, всегда заканчивается построением оптимального базисного плана.

**С л е д с т в и е.** Для существования оптимальных планов канонической задачи необходимо и достаточно, чтобы ее целевая функция была ограничена сверху на множестве планов.

**Доказательство.** *Необходимость* очевидна.

*Достаточность.* Если целевая функция ограничена на множестве планов, то случаи 1), 3) исхода двухфазного симплекс-метода, приведенные в конце п. 9, не возможны. В случаях 2), 4) будет построен оптимальный план. Следствие доказано.

**11. Преобразование линейных задач к канонической форме. Нормальная форма.** Задачи линейного программирования могут отличаться от канонической одним или несколькими элементами. Однако все они сводятся к канонической форме, что доказывает общность канонической задачи.

Линейная задача минимизации

$$c'x \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (38)$$

сводится к задаче максимизации, если у целевой функции изменить знак, т. е. задача (38) эквивалентна следующей:

$$-c'x \rightarrow \max, \quad x \in X.$$

Когда в основных ограничениях параметр  $b_i$  некоторого равенства отрицателен, то решение задачи не изменится, если обе части этого равенства умножить на  $-1$ , что приведет ограничение к каноническому виду.

Пусть среди ограничений линейной задачи имеется неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \leq \beta. \quad (39)$$

Покажем, что оно эквивалентно равенству

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + x_{n+1} = \beta \quad (40)$$

и простому неравенству

$$x_{n+1} \geq 0. \quad (41)$$

Действительно, если  $n$ -вектор  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  удовлетворяет неравенству (39), то  $n+1$ -вектор  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  с  $x_{n+1} = \beta - (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$  удовлетворяет равенству (40) и неравенству (41). Наоборот, если на векторе  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  выполняются (40), (41), то на векторе  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  будет выполняться (39). Таким образом, «неканонический» элемент (39) линейной задачи сведен к элементам (40), (41) канонической задачи. Переменную  $x_{n+1}$  принято называть *свободной*.

Если вместо (39) в линейной задаче имеется неравенство противоположного смысла, то оно умножением на  $-1$  предварительно сводится к (39).

Может оказаться, что в линейной задаче не наложено ограничение на знак переменной  $x_j$ . В этом случае переменная  $x_j$  заменяется на две неотрицательные переменные  $x_j^1, x_j^2$  по формуле

$$x_j = x_j^1 - x_j^2. \quad (42)$$

Поскольку для любого числа  $x_j$  найдутся числа  $x_j^1 \geq 0, x_j^2 \geq 0$  такие, что выполняется равенство (42), то замена (42) является эквивалентным преобразованием линейной задачи (т. е. всегда можно осуществить прямой и обратный переходы от решений старой к решениям новой задачи).

Совокупность перечисленных преобразований позволяет любую задачу линейного программирования свести к канонической форме.

**З а м е ч а н и е.** Часто в линейных задачах вместо *одностороннего прямого ограничения*  $x \geq 0$  имеются *двухсторонние прямые ограничения*  $0 \leq x \leq d$ . Включать дополнительное ограничение  $x \leq d$  в число основных нецелесообразно из-за увеличения размеров  $n, m$  задачи. Существует простая модификация симплекс-метода, эффективно учитывающая двухсторонние прямые ограничения. Реализация симплекс-метода с полным учетом специальной структуры параметров задачи — один из современных путей эффективного решения прикладных задач линейного программирования.

Среди задач линейного программирования наряду с канонической задачей особое место занимает *нормальная задача*

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0 \quad (b \geq 0), \quad (43)$$

в которой основное ограничение ( $Ax \leq b$ ) составлено из неравенств. Введением  $m$ -вектора  $x_{\text{св}}$  свободных переменных  $x_j, j \in J_{\text{св}} = \{n+1, \dots, n+m\}$ , задача (43) сводится к канонической

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{\text{св}} = b, x \geq 0, x_{\text{св}} \geq 0. \quad (44)$$

Легко построить начальный базисный план  $\{x, x_{\text{св}}\}$  задачи (44):  $x=0, x_{\text{св}}=b$ . Начальная базисная матрица  $A_B$  состоит из единичных векторов условий, соответствующих свободным переменным:

$$A_B = \{a_j = e_{j-n}, j \in J_{\text{св}}\}.$$

Таким образом, при решении симплекс-методом нормальных задач отпадает необходимость в использовании первой фазы.

**З а м е ч а н и я.** 1. В конкретных задачах, исходя из структуры матрицы условий, вводят только такие искусственные единичные векторы условий, которые в совокупности с имеющимися единичными векторами условий составляют ортонормированный базис  $m$ -мерного пространства (единичную диагональную  $m \times m$ -матрицу).

2. Внешним признаком, отличающим искусственные переменные от свободных, является то, что последние не входят в целевую функцию.

**12. Пример (производственная задача). Симплексные таблицы.** Одним из важнейших физических прототипов математической модели (4) является *производственная задача* — источник основных понятий для модели (4). Ее неформальная формулировка такова. На предприятии производится продукция  $n$  типов. При этом расходуются ресурсы  $m$  типов, имеющиеся в объемах  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Известны затраты  $a_{ij}$   $i$ -го ресурса на изготовление единицы  $j$ -й продукции и прибыль  $c_j$  от реализации единицы  $j$ -й продукции. Требуется найти план производства с максимальной прибылью.

Для иллюстрации симплекс-метода решим пример производственной задачи с матрицей затрат из табл. I.1. Равенства в последнем столбце таблицы означают, что соответствующие ресурсы должны использоваться полностью.

Обозначим через  $x_j, j=1, 4$ , количество планируемой к производству  $j$ -й продукции. Поскольку  $j$ -я продукция может производиться ( $x_j > 0$ ) или не производиться ( $x_j = 0$ ), то переменные должны удовлетворять ограничениям  $x_j \geq 0, j=1, 4$ . Прибыль от реализации  $j$ -й продукции равна  $c_j x_j$ , от реализации всей продукции предприятия

Тип ресурса $i$ \ Тип продукции $j$	1	2	3	4	Объем ресурсов $b_i$
1	5	20	5	20	= 1000
2	0	5	10	5	= 500
3	0	0	10	10	≤ 700
Прибыль на единицу продукции $c_j$	10	30	20	15	

$10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4$ . Расход первого ресурса для обеспечения плана равен  $5x_1 + 20x_2 + 5x_3 + 20x_4$ . Аналогично подсчитывается расход других ресурсов. Согласовав эти расходы с имеющимися объемами ресурсов, получим математическую модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 &\rightarrow \max, \\
 5x_1 + 20x_2 + 5x_3 + 20x_4 &= 1000, \\
 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 500, \\
 10x_3 + 10x_4 &\leq 700, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Введя свободную переменную  $x_5$  и разделив первое равенство на 5, перейдем к канонической форме\*):

$$\begin{aligned}
 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 &\rightarrow \max, \\
 x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 &= 200, \\
 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 500, \\
 10x_3 + 10x_4 + x_5 &= 700, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Матрица условий задачи (45) содержит два единичных столбца ( $a_1=e_1$  и  $a_5=e_3$ ). Если эти векторы дополнить вектором  $a_6=e_2$ , получим единичную диагональную матрицу. Следовательно, задачу первой фазы для (45) можно сформировать, введя только одну искусственную переменную  $x_6$ :

$$\begin{aligned}
 & -x_6 \rightarrow \max, \\
 x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 &= 200, \\
 5x_2 + 10x_3 + 5x_4 + x_6 &= 500, \\
 10x_3 + 10x_4 + x_5 &= 700, \\
 x_i \geq 0, i = \overline{1,6}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Вектор  $\{200, 0, 0, 0, 700, 500\}$  является базисным планом задачи (46) с базисной матрицей  $A_B = \{a_1=e_1, a_5=e_3, a_6=e_2\}$ .

Для решения задачи вручную опишем новую (табличную) реализацию симплекс-метода\*\*), основанную на использовании симплексных

\*) Свободная переменная  $x_5$  имеет физический смысл объема свободного (не использованного в плане) третьего ресурса.

\*\*) Реализация симплекс-метода из п. 6 часто называется методом обратной матрицы. Исторически она возникла после табличной реализации.

таблиц. Будем исходить из формулы подсчета оценок  $\Delta'_H = c'_B A_B^{-1} A_H - c'_H$ , которая содержится в (11). В компонентной записи она имеет вид

$$\Delta_j = c'_B A_B^{-1} a_j - c_j, \quad j \in J_H. \quad (47)$$

Пусть имеются разложения по базису каждого небазисного вектора условий  $a_j$ , т. е. компоненты  $x_{ij}$ ,  $i \in J_B$ , вектора  $A_B^{-1} a_j$  (табл. I.2). Тогда, перемножая базисные компоненты вектора стоимости  $c_B$  на соответствующие компоненты вектора  $\{x_{ij}, i \in J_B\}$  ( $x_{ij}$  — элементы  $a_j$ -столбца), слагая результаты и вычитая из суммы число  $c_j$  ( $j$ -й элемент  $c$ -строки), получаем число (47) ( $j$ -й элемент  $\Delta$ -строки). Все эти операции для начального базисного плана задачи (46) осуществлены на *симплексной таблице\** (табл. I.2).

Т а б л. I.2

$c'_B \backslash c^1$			0	0	0	0	0	-1	
	Базис $b, a_j$	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$\theta$
0	$a_1$	200	1	4	1	4	0	0	200
-1	$a_6$	500	0	5	10	5	0	1	50 →
0	$a_5$	700	0	0	10	10	1	0	70
	$\Delta$		0	-5	-10	-5	0	0	

↑

Поскольку начальная базисная матрица единичная, то компоненты разложения векторов  $b, a_j, j = \overline{1, 6}$ , по базису, записанные в табл. I.2 под соответствующими векторами, равны параметрам задачи (46), т. е. в табл. I.2 непосредственно переписываются данные задачи (46). В табл. I.2 внесены нулевые базисные оценки, что не противоречит (47), если расширить  $J_H$  до  $J$ .

В  $\Delta$ -строке найдем минимальный элемент  $\Delta_{j_0} = \Delta_3 = -10$ . Поскольку он отрицателен, то начальный план не оптимален. Столбец  $a_3$ , соответствующий минимальной оценке, называется *ведущим столбцом* симплексной таблицы. Элементы  $x_i, i \in J_B, b$ -столбца, соответствующие положительным элементам  $x_{ij_0} > 0, i \in J_B$ , ведущего столбца, разделим на  $x_{ij_0}$  и результаты  $\theta_i$  (25) занесем в  $\theta$ -столбец. Минимальный элемент  $\theta^0 = \theta_{i_0} = \theta_6 = 50$  равен, очевидно, числу, заданному формулой (26). Строка  $a_6$  с минимальным  $\theta^0$  называется *ведущей строкой*. Элемент  $x_{i_0 j_0} = 10$ , лежащий на пересечении ведущих столбца и строки, называется *ведущим элементом* симплексной таблицы.

Согласно симплекс-методу новая базисная матрица  $\bar{A}_B$  получается из старой  $A_B$  заменой в последней вектора  $a_{i_0}$  на вектор  $a_{j_0}$ . Это обстоятельство отмечено в табл. I.2 стрелками, которые указывают

\*)  $c^1$  — вектор стоимости первой фазы.

на входящий (в новый базис) и выходящий (из старого базиса) векторы условий. Основная часть (элементы на пересечениях базисных строк с  $b$ -,  $a_j$ -столбцами) новой симплексной таблицы должна состоять из разложений векторов  $b$ ,  $a_j$ ,  $j \in J$ , по новому базису. Из формул (34), (35) для элементов матрицы  $\bar{A}_B^{-1}$  следуют формулы для элементов  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{x}_{ij}$  разложений векторов  $b, a_j$ ,  $j \in J$ , по новому базису:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{j_0} &= x_{i_0}/x_{i_0j_0}; \quad \bar{x}_i = x_i - x_{ij_0} x_{i_0}/x_{i_0j_0}, \quad i \in \bar{J}_B \setminus j_0; \\ \bar{x}_{j_0j} &= x_{i_0j}/x_{i_0j_0}, \quad j \in J; \\ \bar{x}_{ij} &= x_{ij} - x_{i_0j} x_{ij_0}/x_{i_0j_0}, \quad i \in \bar{J}_B \setminus j_0, \quad j \in J.\end{aligned}\tag{48}$$

Здесь  $x_i$ ,  $x_{ij}$ ,  $i \in J_B$ ,  $j \in J$ , — элементы старой таблицы.

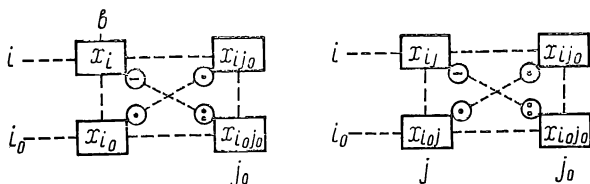


Рис. 1.3

Формулы (48) легко реализуются на симплексной таблице с помощью *правила прямоугольника*. Сначала в новой таблице заполняются столбцы с векторами нового базиса. Затем заполняется строка  $a_{j_0}$ , которая в старой таблице была ведущей ( $a_{i_0}$ -строка):

$$\bar{x}_{j_0} = x_{i_0}/x_{i_0j_0}, \quad \bar{x}_{j_0j} = x_{i_0j}/x_{i_0j_0}, \quad j \in J,$$

т. е. элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент. Для подсчета остальных элементов  $\bar{x}_i$  ( $\bar{x}_{ij}$ ) поступаем так. В старой таблице с помощью  $x_i$  ( $x_{ij}$ ) и ведущего элемента  $x_{i_0j_0}$  строим прямоугольник (рис. 1.3). Из элемента  $x_i$  (соответственно  $x_{ij}$ ) вычитаем (на это указывает знак «—» у клетки) произведение элементов с «побочной» диагонали, деленное на ведущий элемент с основной диагонали. В результате получим элемент  $\bar{x}_i$  ( $\bar{x}_{ij}$ ), который заносим в ту клетку новой таблицы, в которой ранее находился  $x_i$  ( $x_{ij}$ ). Числа  $\bar{A}_j$  можно подсчитать по формуле (47) или описанному правилу прямоугольника, которое, как нетрудно показать, справедливо и в этом случае. Таким образом, новая симплексная таблица построена. Этим завершается симплексная итерация при ручном счете.

Для табл. I.2 составлена новая симплексная таблица (табл. I.3). Поскольку в базисе табл. I.3 нет искусственного вектора условия  $a_6$ , то первая фаза симплекс-метода завершена. Для перехода ко второй фазе в табл. I.3 заменим вектор  $c^1$  на вектор стоимости  $c$  исходной задачи (46) и получим табл. I.4, с которой начинаем итерации вто-

Табл. I.3

$C^1$	$C^1$		0	0	0	0	0	-1
	Базис $\delta, a_j$	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
0	$a_1$	150	1	7/2	0	7/2	0	-1/10
0	$a_3$	50	0	1/2	1	1/2	0	1/10
0	$a_5$	200	0	-5	0	5	1	-1

Табл. I.4

$C^1$	$C$		10	30	20	15	0	0
	Базис $\delta, a_j$	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
10	$a_1$	150	1	7/2	0	7/2	0	-1/10
20	$a_3$	50	0	1/2	1	1/2	0	1/10
0	$a_5$	200	0	-5	0	5	1	-1
	$\Delta$		0	15	0	30	0	1

рой фазы. Табл. I.4 удовлетворяет критерию оптимальности \*). Элементы оптимального плана выписываем из  $b$ -столбца, дополняя небазисные компоненты нулями:  $x^0 = \{150, 0, 50, 0\}$ .

В заключение сравним табличную реализацию симплекс-метода с реализацией п. 6, основанной на использовании обратных базисных матриц. Табличная форма проста \*\*). Это при ручном счете уменьшает вероятность появления случайных ошибок. Однако при ее реализации на ЭВМ, что неизбежно при больших  $m, n$  \*\*\*), обнаруживаются серьезные недостатки. Во-первых, в ходе табличных итераций нужно преобразовывать и запоминать  $(m+1) \times n$ -матрицы, тогда как на итерациях метода обратной матрицы использовались только  $m \times m$ -матрицы. Во-вторых, в процессе итераций данного пункта элементы новой таблицы вычисляются только по элементам старой таблицы. Из-за этого таблицы оказываются *сильно заполненными*, хотя начальная таблица могла быть *слабо заполненной* (содержать малый процент ненулевых элементов \*\*\*\*)). Понятно, что указанное обстоятельство увеличивает число операций на ЭВМ и способствует быстрому накоплению ошибок округления. В методе п. 6 на каждой итерации используется исходная информация, что позволяет эффективно учесть слабую заполненность матрицы  $A$  за счет исключения

\*) Искусственный столбец  $a_6$  можно удалить из табл. I.4, ибо он не имеет отношения к задаче (46). Однако он понадобится в дальнейшем (§ 2, 3) для анализа чувствительности и поэтому столбец  $a_6$  сохраняется, но его оценка  $\Delta_6$  никогда не учитывается на итерациях второй фазы.

\*\*) Ее можно еще более упростить, если исключить столбцы, содержащие элементы текущего базиса. Однако полная таблица удобнее с точки зрения анализа чувствительности (см. далее § 3).

\*\*\*) В приложениях встречаются задачи с  $m > 10\,000, n > 100\,000$ .

\*\*\*\*\*) Матрицы условий многих практических задач содержат не более 3—5% ненулевых элементов.

операций умножения на нуль. Преимущества метода п. 6 по сравнению с методом данного пункта возрастают с увеличением размеров задачи.

**13. Задача на минимакс.** Среди задач, которые сводятся к задачам линейного программирования, заметное место занимает *задача на минимакс* \*)

$$\max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s \right) \rightarrow \min_x, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (49)$$

которая от канонической задачи (4) отличается (специальной) нелинейностью целевой функции. Докажем, что задача (49) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$x_{n+1} \rightarrow \min_{x, x_{n+1}}, \quad \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s \leq x_{n+1}, \quad s = \overline{1, k}; \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (50)$$

Если  $x^0$  — решение задачи (49), то

$$\left\{ x^0, x_{n+1}^0 = \max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) \right\} \quad (51)$$

есть решение задачи (50). Действительно, если допустить существование такого плана  $\{x^*, x_{n+1}^*\}$  задачи (50), что  $x_{n+1}^* < x_{n+1}^0$ , то для целевой функции задачи (49) получится неравенство

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) &= x_{n+1}^0 > x_{n+1}^* \geq \\ &\geq \max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right), \end{aligned}$$

которое противоречит тому, что  $x^0$  — решение задачи (49).

Пусть теперь  $\{x^*, x_{n+1}^*\}$  — решение задачи (50). Тогда  $x^*$  — решение задачи (49). На самом деле, если решением задачи (49) является другой вектор  $x^0$  и

$$\max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) < \max_{1 \leq s \leq k} \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right), \quad (52)$$

то вектор (51), очевидно, удовлетворяет ограничениям задачи

---

\*) Задачи, исследованные в первых работах Л. В. Канторовича, относились к этому классу.



(50) и для его последней компоненты  $x_{n+1}^0$  в силу (52) выполняется неравенство  $x_{n+1}^0 < x_{n+1}^*$ , противоречащее предположению об оптимальности плана  $\{x^*, x_{n+1}^*\}$ .

**14. Кусочно-линейная задача.** Задача

$$\sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s \right| \rightarrow \min_x, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (53)$$

с кусочно-линейной целевой функцией относится к классу *кусочно-линейных задач*. Докажем, что она эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{s=1}^k (v_s + w_s) \rightarrow \min_{x, v, w}, \quad \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j - d_s = v_s - w_s, \quad s = \overline{1, k}, \quad (54)$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad v = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad w = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}.$$

Пусть  $x^0$  — решение задачи (53). Тогда вектор  $\{x^0, v^0, w^0\}$  с компонентами

$$v_s^0 = \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s, \quad w_s^0 = 0, \quad \text{если } \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \geq 0, \quad (55)$$

$$v_s^0 = 0, \quad w_s^0 = - \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 + d_s, \quad \text{если } \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s < 0, \quad s = \overline{1, k},$$

является решением задачи (54). Допустим, что это не так, т. е. найдется план  $\{x^*, v^*, w^*\}$  задачи (54), на котором выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^k (v_s^* + w_s^*) < \sum_{s=1}^k (v_s^0 + w_s^0). \quad (56)$$

Тогда, обозначив через  $\sum_{s=1}^k + \alpha_s$ ,  $\sum_{s=1}^k - \alpha_s$  сумму неотрицательных и (соответственно) отрицательных компонент  $\alpha_s$ ,  $s = \overline{1, k}$ , с учетом (54) — (56) получим

$$\sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right| = \sum_{s=1}^k + \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right) - \sum_{s=1}^k - \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right)$$

$$\begin{aligned}
-d_s) &= \sum_{s=1}^k + (v_s^* - w_s^*) - \sum_{s=1}^k - (v_s^* - w_s^*) \leq \sum_{s=1}^k v_s^* + \sum_{s=1}^k w_s^* < \\
&< \sum_{s=1}^k (v_s^0 + w_s^0) = \sum_{s=1}^k + \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) - \\
&- \sum_{s=1}^k - \left( \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right) = \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right|, \quad (57)
\end{aligned}$$

т. е. первое выражение в (57) строго меньше последнего, что невозможно, когда  $x^0$  — решение задачи (53).

Если  $\{x^*, v^*, w^*\}$  — решение задачи (54), то  $x^*$  — решение задачи (53). Рассуждаем от противного: решением задачи (53) является вектор  $x^0$  и

$$\sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right| < \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right|. \quad (58)$$

По вектору  $x^0$  построим векторы  $v^0, w^0$  с компонентами (55). Тогда вектор  $\{x^0, v^0, w^0\}$  станет планом задачи (54), который в силу соотношений

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^k (v_s^0 + w_s^0) &= \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^0 - d_s \right| < \sum_{s=1}^k \left| \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j^* - d_s \right| = \\
&= \sum_{s=1}^k + (v_s^* - w_s^*) - \sum_{s=1}^k - (v_s^* - w_s^*) \leq \sum_{s=1}^k (v_s^* + w_s^*),
\end{aligned}$$

следующих из (54), (58), лучше оптимального плана  $\{x^*, v^*, w^*\}$ . Полученное противоречие заканчивает доказательство эквивалентности задач (53), (54).

## § 2. Теория двойственности

*Теорией двойственности* линейного программирования называется раздел, в котором задачи линейного программирования исследуются с помощью вспомогательных, тесно связанных с исходными *двойственных задач*.

**1. Двойственная задача.** Рассмотрим каноническую задачу

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

которую впредь будем называть *прямой канонической задачей* линейного программирования.

Согласно симплекс-методу каждому оптимальному базисному плану  $x^0$  с базисной матрицей  $A_B$  соответствует  $m$ -вектор потенциалов  $u = u(I)$ , удовлетворяющий соотношениям (см. (12), (15) из § 1)

$$u' A_B = c'_B, \quad u' A_N \geq c'_N. \quad (2)$$

Подсчитаем значение линейной функции  $b'u$  на этом векторе:

$$bu' = u'b = c'_B A_B^{-1} b = c'_B x_B^0 = c'x^0. \quad (3)$$

Пусть  $y$  — произвольный  $m$ -вектор, удовлетворяющий неравенству

$$A'y \geq c,$$

которое является обобщением соотношений (2). Для этого вектора получаем

$$b'y = y'b = y'Ax^0 \geq c'x^0. \quad (4)$$

Из (3), (4) следует, что вектор  $u$  — решение задачи

$$b'y \rightarrow \min, \quad A'y \geq c. \quad (5)$$

Задача (5) называется *двойственной (канонической) задачей* линейного программирования. Она составлена из параметров канонической задачи (1), содержит  $m$  переменных  $y_i, i \in I$  (вместо  $n$  в (1)), и  $n$  основных ограничений  $a_j' y \geq c_j, j \in J$  (вместо  $m$  в (1)), и на ее переменные наложены прямые ограничения. Таким образом, размеры  $m, n$  задач (1), (5) «переставлены» местами. Легко запомнить правила перехода от прямой задачи (1) к двойственной (5):

$$\begin{aligned} x \rightarrow y, \quad c \rightarrow b, \quad \max \rightarrow \min, \quad A \rightarrow A', \quad = \rightarrow \geq, \\ x \geq 0 \rightarrow y \in R_m. \end{aligned} \quad (6)$$

Часто более удобен другой метод составления двойственных задач. Для задачи (1) сформируем функцию Лагранжа

$$F(x, y) = c'x + y'(b - Ax) \quad (7)$$

и с ее помощью введем прямую  $\varphi(x), x \geq 0$ , и двойственную  $\psi(y), y \in R_m$ , функции

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \inf F(x, y), \quad y \in R_m; \\ \psi(y) &= \sup F(x, y), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим множество

$$\{x \geq 0: \varphi(x) > -\infty\}. \quad (9)$$

Из (7) и (8) видно, что оно состоит из тех и только тех  $n$ -векторов  $x$ , которые удовлетворяют соотношениям  $Ax=b$ ,  $x \geq 0$ . Таким образом, множество  $X$  планов прямой задачи (прямых планов задачи (1)) совпадает с (9). Аналогично множество

$$\{y: \psi(y) < \infty\}$$

совпадает с множеством  $Y = \{y: A'y \geq c\}$  планов задачи (5) (двойственных планов задачи (1)).

Поскольку

$$\begin{aligned} \max_{x \geq 0} \varphi(x) &= \begin{cases} \max c'x, & \text{если } x \in X, \\ -\infty, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \\ \min_{y \in R_m} \psi(y) &= \begin{cases} \min b'y, & \text{если } y \in Y, \\ \infty, & \text{если } y \notin Y, \end{cases} \end{aligned}$$

то прямую (1) и двойственную (5) канонические задачи можно записать в следующей форме:

$$\varphi(x) \rightarrow \max, x \geq 0; \quad \psi(y) \rightarrow \min, y \in R_m. \quad (10)$$

Если задачу (5) привести к канонической форме, а затем по описанным правилам составить для последней двойственную задачу, то получим задачу (1). Таким образом, задачи (1), (5) представляют пару *взаимно-двойственных задач*.

В заключение составим задачу, двойственную к нормальной задаче

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0. \quad (11)$$

Поскольку эта задача эквивалентна (§ 1) следующей канонической:

$$c'x \rightarrow \max, Ax + x_{\text{св}} = b, x \geq 0, x_{\text{св}} \geq 0, \quad (12)$$

то применение правил (6) к задаче (12) приводит к *двойственной нормальной задаче*

$$b'y \rightarrow \min, A'y \geq c, y \geq 0. \quad (13)$$

В задаче (13) двойственные переменные  $y_i, i \in I$ , уже

имеют прямое ограничение  $y \geq 0$ . Сравнивая пары задач (1), (5) и (11), (13), заключаем, что 1) каждому  $i$ -му основному ограничению одной задачи из пары соответствует  $i$ -я переменная другой задачи из пары; 2) если основное ограничение имело вид равенства, то соответствующая переменная двойственной задачи не имеет ограничения на знак; 3) если основное ограничение имеет вид неравенства, то двойственная переменная неотрицательна; 4) если переменная не имеет ограничения на знак, то соответствующее ей основное ограничение двойственной задачи имеет вид равенства; 5) если переменная задачи должна быть неотрицательной, то соответствующее ей основное ограничение двойственной задачи имеет вид неравенства.

Предлагается самостоятельно проверить, что в терминах функции Лагранжа (7) задачи (11), (13) записываются в следующей форме (сравнить с (10)):

$$\varphi(x) \rightarrow \max, \quad x \geq 0; \quad \psi(y) \rightarrow \min, \quad y \geq 0,$$

где прямая  $\varphi(x)$ ,  $x \geq 0$ , и двойственная  $\psi(y)$ ,  $y \geq 0$ , функции в отличие от (8) определены соотношениями

$$\varphi(x) = \inf F(x, y), \quad y \geq 0; \quad \psi(y) = \sup F(x, y), \quad x \geq 0.$$

**2. Теория двойственности.** Основу теории двойственности составляют *теорема существования и теорема двойственности* и вытекающие из них *соотношения двойственности* между решениями прямой и двойственной задач.

**Теорема 1 (существования).** Для существования решения задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы не были пустыми множества ее прямых и двойственных планов.

**Доказательство. Необходимость.** В силу общности канонической задачи достаточно рассмотреть только задачу (1). В § 1 показано, что если задача (1) имеет решение, то найдется и оптимальный базисный план  $x^0$ , которому согласно п. 1 соответствует вектор потенциалов  $u$ , являющийся оптимальным двойственным планом.

**Достаточность.** Пусть множества  $X$ ,  $Y$  прямых и двойственных планов непусты. Тогда для любых  $x \in X$ ,  $y \in Y$  выполняется (см. вывод неравенства (4) в п. 1) неравенство

$$c'x \leq b'y,$$

т. е. целевая функция задачи (1) ограничена сверху на множестве  $X$ . Согласно следствию из п. 10 § 1 этого достаточно для существования оптимального базисного плана  $x^0$ . Теорема доказана.

**Теорема 2 (двойственности).** Для существования решения  $x^0$  прямой задачи линейного программирования необходимо и достаточно существование решения  $y^0$  двойственной ей задачи. На решениях  $x^0, y^0$  значения <sup>\*)</sup> прямой и двойственной целевых функций равны:

$$c'x^0 = b'y^0. \quad (14)$$

Доказательство необходимости совпадает с аналогичным в теореме 1.

**Достаточность.** Пусть  $y^0$  — решение двойственной задачи (5). Рассматриваем ее как прямую и используем первую часть утверждения, учитывая, что задача (1) станет двойственной к (5). Теорема доказана.

**Следствие 1.** На каждой паре из прямого  $x$  и двойственного  $y$  планов выполняется неравенство

$$c'x \leq b'y. \quad (15)$$

Доказательство приведено в п. 1 (см. (4)).

**Следствие 2 (достаточное условие несовместности ограничений).** Если вдоль некоторой последовательности  $y^k, k=1, 2, \dots$ , двойственных планов двойственная целевая функция неограниченно убывает:

$$b'y^k \rightarrow -\infty, k \rightarrow \infty, \quad (16)$$

то прямая задача (1) не имеет планов.

**Доказательство.** Если допустить существование плана  $x$ , то в силу (16) найдется такое число  $k_0$ , что  $c'x > b'y^{k_0}$  вопреки (15). Следствие доказано.

**Следствие 3 (достаточное условие оптимальности).** Если на некоторых прямом  $x^*$  и двойственном  $y^*$  планах выполняется равенство

$$c'x^* = b'y^*, \quad (17)$$

то  $x^*, y^*$  — решения задач (1), (5).

**Доказательство.** Поскольку согласно (15) на множестве  $X$  значения функции  $c'x$  не могут превзойти числа  $b'y^*$ , а на  $x^*$  выполняется (17), то  $x^*$  — оптималь-

---

<sup>\*)</sup> Для краткости:  $c'x$  — прямая целевая функция;  $b'y$  — двойственная целевая функция.

ный план. Аналогично доказываем, что  $y^*$  — оптимальный двойственный план. Следствие доказано.

**Следствие 4** (условия дополняющей нежесткости в нормальной задаче). Пусть  $x^0$ ,  $y^0$  — решения задач (11), (13). Если  $i$ -е основное ограничение прямой задачи *пассивно* на  $x^0$  ( $A(i, J)x^0 < b_i$ ), то  $i$ -я компонента вектора  $y^0$  равна нулю. Обратно: если  $y_i^0 > 0$ , то  $i$ -е основное ограничение *активно* на  $x^0$  ( $A(i, J)x^0 = b_i$ ).

**Доказательство.** Основное ограничение задачи (11) сведем к равенству (см. (12)); умножим последнее в точке  $x^0$  скалярно на  $y^0$ :

$$y^{0'} Ax^0 + y^{0'} x_{св}^0 = b' y^0. \quad (18)$$

Основное ограничение двойственной задачи (13) в точке  $y^0$  умножим скалярно на  $x^0$ :

$$y^{0'} Ax^0 \geq c' x^0. \quad (19)$$

Из (18), (19) следует неравенство  $c' x^0 \leq b' y^0 - y^{0'} x_{св}^0$ , которое в силу (14) сводится к неравенству  $y^{0'} x_{св}^0 \leq 0$ . С другой стороны, поскольку  $x_{св}^0 \geq 0$ ,  $y^0 \geq 0$ , то  $y^{0'} x_{св}^0 \geq 0$ . Следовательно, справедливо равенство

$$y^{0'} x_{св}^0 = y^{0'} [b - Ax^0] = \sum_{i=1}^m y_i^0 (b_i - A(i, J)x^0) = 0,$$

содержащее компактную запись перечисленных выше условий дополняющей нежесткости в нормальной задаче (11). Следствие доказано.

Другие факты теории двойственности будут доказаны в гл. II.

### 3. Физический смысл двойственных переменных.

В каждой прикладной задаче элементы прямой (исходной) задачи имеют определенный физический смысл. Построение двойственной задачи носит формальный характер. Для уверенного и эффективного использования данных по двойственной задаче при исследовании прямой задачи важное значение имеет выяснение физического смысла двойственных переменных \*). Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

\*) Для многих конкретных задач удается придать физический смысл и двойственным задачам и соотношениям двойственности, что позволяет получить дополнительную информацию о решениях прямой задачи.

**Лемма.** Если  $x^0$  — оптимальный невырожденный базисный план канонической задачи, то двойственная к ней задача имеет единственное решение  $y^0$ , совпадающее с вектором потенциалов плана  $x^0$ :

$$y^{0'} = u' = c'_B A_B^{-1}.$$

**Доказательство.** Для  $u$  и произвольного двойственного плана  $y$  вычислим разность:

$$b'y - b'u = (y - u)'b = (y'A_B - c'_B)x_B^0.$$

Эта разность при  $x_B^0 > 0$  будет положительной, если  $y'A_B - c'_B \neq 0$ . Следовательно, любой оптимальный двойственный план должен совпадать с  $u$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $x^0 = x_b^0$  — оптимальный невырожденный базисный план канонической задачи (1), соответствующий вектору  $b$ . Тогда компоненты оптимального двойственного плана  $y^0$  удовлетворяют равенствам

$$y_i^0 = \frac{\partial c' x_b^0}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i} \max_{Ax=b, x \geq 0} c'x, \quad i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Пусть  $A_B$  — базисная матрица плана  $x^0$ . Из неравенства  $x_B^0 = A_B^{-1}b > 0$  при достаточно малых  $\|\Delta b\|$  следует неравенство  $A_B^{-1}(b + \Delta b) > 0$ , т. е. вектор  $x_{b+\Delta b}^0 = \{A_B^{-1}(b + \Delta b), x^0(J_H) = 0\}$  является оптимальным невырожденным базисным планом задачи (1), в которой вектор  $b$  заменен на  $b + \Delta b$ . Поскольку у планов  $x_b^0, x_{b+\Delta b}^0$  общие базисные матрицы, то им соответствует один и тот же оптимальный двойственный план  $y^0$ . Таким образом, используя соотношение двойственности (14), получаем равенства

$$c'x_{b+\Delta b}^0 - c'x_b^0 = y^{0'}(b + \Delta b) - y^{0'}b = y^{0'}\Delta b,$$

содержащие другую запись равенств (20). Теорема доказана.

В терминах производственной задачи (см. п. 12 § 1) равенства (20) означают следующее:  $y_i^0$  — *мера (степень) чувствительности* максимальной прибыли к изменению объема  $i$ -го ресурса. Если  $y_i^0 > 0$ , то увеличение объема  $i$ -го ресурса ведет к увеличению максимальной прибыли и тем эффективнее, чем больше  $y_i^0$ . При  $y_i^0 < 0$  к увеличению



максимальной прибыли ведет уменьшение объема  $i$ -го ресурса.

**Пример.** В п. 12 § 1 решена задача производственного типа. В табл. I.4 записан оптимальный план  $x^0$ . Из таблицы можно извлечь также компоненты оптимального двойственного плана  $y^0$ . Согласно формуле (2) и формуле для оценок  $\Delta_j = u' a_j - c_j$   $i$ -я компонента  $y_i^0$  получается из оценки  $\Delta_j$ , лежащей в столбце с единичным вектором условий  $e_j$ , если к ней добавить коэффициент стоимости  $c_j$ . Таким образом,  $y_1^0 = 10$ ,  $y_2^0 = 1$ ,  $y_3^0 = 0$ . По этим значениям в силу формулы (20) можно заключить, что в условиях примера увеличение объема 1-го ресурса в окрестности значения  $b_1 = 200$  в 10 раз эффективнее сказывается на увеличении прибыли, чем увеличение объема 2-го ресурса. Можно нестрого сказать, что 1-й ресурс ценнее 2-го ресурса в 10 раз. Тот же ресурс при других условиях (в других задачах, при других значениях параметров) будет иметь другую ценность. Поэтому, хотя физическая размерность компонент двойственного плана  $y^0$  совпадает с размерностью компонент вектора стоимости, но это согласно сказанному не ценность в обычном понимании. Часто говорят, что  $y_i^0$  — объективно обусловленная оценка  $i$ -го ресурса.

**4. Приложение к теории неравенств.** Теория двойственности имеет многочисленные приложения в различных разделах математики. В этом пункте получим несколько результатов теории линейных неравенств, которые понадобятся в будущем.

**Теорема 4 (Фаркаша о неравенствах-следствиях).** Для того чтобы на каждом  $n$ -векторе  $x$ , удовлетворяющем неравенствам

$$a'_i x \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (21)$$

выполнялось неравенство

$$a'_0 x \leq 0, \quad (22)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные числа  $\mu_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , что

$$a_0 = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i. \quad (23)$$

**Доказательство. Необходимость.** Если из неравенств (21) следует неравенство (22), то вектор  $x=0$  является решением задачи

$$a'_0 x \rightarrow \max, \quad a'_i x \leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (24)$$

По теореме двойственности существует решение  $y^0$  задачи

$$0' y \rightarrow \min, \sum_{i=1}^m a_i y_i = a_0, y \geq 0, (y = \{y_1, \dots, y_m\}), \quad (25)$$

двойственной к (24). Совместность ограничений задачи (25) доказывает равенство (23).

**Достаточность.** Если для параметров неравенств (21), (22) выполняется равенство (23) с  $\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , то после умножения равенства (23) на любой вектор  $x$ , удовлетворяющий системе (21), получим неравенство (22). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

**Теорема 5 (о неравенстве-следствии равенств).** Неравенство (22) является следствием равенств

$$a'_i x = 0, i = \overline{1, m},$$

тогда и только тогда, когда для некоторых  $\mu_i, i = \overline{1, m}$ , выполняется равенство (23).

**З а м е ч а н и е.** Теорема Фаркаша не изменится, если неравенства (21) заменить на строгие  $a'_i x < 0, i = \overline{1, m}$ . Для доказательства этого результата достаточно заметить, что соответствующая задача  $a'_0 x \rightarrow \max, a'_i x \leq \varepsilon_i, i = \overline{1, m}$ , при любых  $\varepsilon_i > 0, i = \overline{1, m}$ , имеет решение, поскольку согласно (22) ее целевая функция ограничена сверху на множестве планов.

**Теорема 6 (несовместность системы неравенств).** Неравенства

$$a'_i x < 0, i = \overline{1, m}, \quad (26)$$

несовместны в том и только том случае, когда существуют такие не равные одновременно нулю неотрицательные числа  $\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ , что

$$\sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0. \quad (27)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** **Достаточность.** Пусть для некоторой совокупности  $\{\mu_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$  выполняется равенство (27), но существует  $n$ -вектор  $x^*$ , удовлетворяющий системе (26), т. е.

$$a'_i x^* = \alpha_i, \alpha_i < 0, i = \overline{1, m}. \quad (28)$$

Умножим  $i$ -е равенство на  $\mu_i \geq 0$  и результаты сложим. Слева в силу (27) получим нуль, а справа, так как  $\sum_{i=1}^m \mu_i > 0$ , получится отрицательное число  $\sum_{i=1}^m \mu_i \alpha_i$ . Противоречие.

**Необходимость.** Несовместность системы (26) означает, что для каждого  $n$ -вектора  $x$  среди чисел  $a'_i x$ ,  $i = \overline{1, m}$ , найдется неотрицательное, т. е.  $\max_{1 \leq i \leq m} a'_i x \geq 0$ . Следовательно, вектор  $x = 0$  есть решение задачи

$$\max_{1 \leq i \leq m} a'_i x \rightarrow \min_x. \quad (29)$$

Согласно п. 13 § 1 задача (29) эквивалентна задаче

$$\xi \rightarrow \min_{x, \xi}, \quad a'_i x \leq \xi, \quad i = \overline{1, m}, \quad (30)$$

решением которой является вектор  $\{x=0, \xi=0\}$ . По теореме двойственности существует и решение двойственной к (30) задачи

$$0'y \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m y_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m y_i = 1, \quad y \geq 0. \quad (31)$$

Совместность ограничений задачи (31) означает, что теорема доказана.

**5. Связь линейного программирования с матричными играми. Теорема о минимаксе.** Одним из результатов, анализ которых привел Дж. фон Неймана к созданию основ теории двойственности, была его теорема о минимаксе из теории матричных игр.

*Матричной игрой (в нормальной форме)* называется тройка  $\{I, J, A\}$ , где  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  — множество чистых стратегий первого игрока,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество чистых стратегий второго игрока,  $A = \{a_{ij}, i \in I, j \in J\}$  — платежная  $m \times n$ -матрица. Игроки одновременно выбирают чистые стратегии  $i \in I, j \in J$  (номера строк и столбцов платежной матрицы  $A$ ) и по значению элемента  $a_{ij}$  производят расчет: 1) если  $a_{ij} > 0$ , то первый игрок получает от второго плату  $a_{ij}$ ; 2) если  $a_{ij} < 0$ , то второй игрок получает от первого плату  $|a_{ij}|$ .

Задача состоит в указании оптимальных стратегий  $i_0 \in I, j_0 \in J$ , обеспечивающих игрокам максимальные выигрыши.

Если платежная матрица имеет *седловую точку*  $\{i_0, j_0\}$ , т. е. для всех  $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  выполняются неравенства

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \quad (32)$$

то  $i_0, j_0$  — *оптимальные стратегии* игроков в следующем смысле. Выбор первым игроком чистой стратегии  $i_0$  гарантирует ему выигрыш  $a_{i_0 j_0}$  (какую бы стратегию  $j \in J$  ни выбрал второй игрок, он не сможет помешать первому выиграть  $a_{i_0 j_0}$ ). Но если первый игрок откажется от  $i_0$ , то у второго игрока появляется возможность выиграть больше, чем —  $a_{i_0 j_0}$ .

В общем случае матрица  $A$  не имеет седловой точки и поэтому само определение оптимальных стратегий становится проблемой. Поскольку в реальной игре приведенного типа большую роль играет информированность участников и выигрыш обычно подсчитывается как результат многих партий (актов выбора участниками своих стратегий), то естественным представляется переход (он сделан впервые Э. Борелем и является кардинальным шагом по расширению стратегий в задачах оптимизации) к *смешанным стратегиям (рандомизации чистых стратегий)*. Участники теперь указывают не конкретную чистую стратегию, а выбирают распределения вероятностей на множествах чистых стратегий  $I, J$ . Совокупность  $x = \{x: x_i \geq 0, i \in I; \sum_{i \in I} x_i = 1\}$  называется *смешанной стратегией* первого игрока. Аналогично  $y = \{y: y_j \geq 0, j \in J; \sum_{j \in J} y_j = 1\}$  — *смешанная стратегия* второго игрока. Таким образом, на игру, состоящую из многих партий, участники указывают вероятности, с которыми они намерены выбирать каждую из своих чистых стратегий, но сам выбор в каждой партии игры осуществляется случайными механизмами, один из которых генерирует случайные числа со значениями в  $I$  и с распределением  $x$ , другой — со значениями в  $J$  и с распределением  $y$ . Простейший механизм устроен следующим образом. Окружность горизонтального круга разделена на части, пропорциональные числам  $x_i, i = \overline{1, m}$ . В центре круга укреплен сбалансированный стрелка, способная вращаться вокруг вертикальной оси. Если запускать стрелку, то последовательность номеров дуг, на которых останавливалась стрелка после каждого запуска, и есть последовательность чистых стратегий, выбираемых в пар-

тиях. Для реализации смешанных стратегий можно использовать датчики случайных (псевдослучайных) чисел из матобеспечения ЭВМ, составленных по заданным распределениям. При новом способе игры участникам невозможно угадать выборы противников, что снимает вопрос о сохранении в тайне чистых стратегий, важный для старого способа игры.

Если в партии реализовались стратегии  $i \in I, j \in J$ , то  $a_{ij}$  — выигрыш первого игрока с вероятностью  $x_i y_j$ .

Средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) первого игрока равен

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \quad (33)$$

Первый игрок выбором  $x$  стремится максимизировать функцию (33), второй — выбором  $y$  минимизировать ее.

Оказывается (этот основной результат пункта будет доказан ниже), что функция (33) имеет седловую точку  $\{x^0, y^0\}$ , т. е. для всех смешанных стратегий  $x, y$  выполняются неравенства

$$f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y). \quad (34)$$

По причинам, объясненным выше, смешанные стратегии  $x^0, y^0$  можно принять за *оптимальные смешанные стратегии* игроков (решение матричной игры).

С целью построения оптимальных стратегий рассмотрим две задачи:

$$\min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \rightarrow \max, x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (35)$$

$$\max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \rightarrow \min, y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (36)$$

Поскольку

$$\min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i,$$

$$\max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j,$$

то с учетом п. 13 § 1 заключаем, что задачи (35), (36) эквивалентны паре двойственных задач:

$$\xi \rightarrow \max_{x, \xi}, \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq \xi, \quad j = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x \geq 0, \quad (37)$$

$$\eta \rightarrow \min_{y, \eta}, \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \eta, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y \geq 0. \quad (38)$$

Из теоремы двойственности:  $\xi^0 = \eta^0$ , откуда имеем

$$\begin{aligned} & \max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \\ & = \max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i = \max_{x, \xi} \xi = \xi^0 = \eta^0 = \min_{y, \eta} \eta = \\ & = \min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \\ & = \min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \end{aligned} \quad (39)$$

С другой стороны, из того, что  $x^0, y^0$  — компоненты решений задач (37), (38), следует

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \min_{y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^0 y_j, \quad \eta^0 = \max_{x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j^0, \\ \xi^0 &= \eta^0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^0 y_j^0, \end{aligned}$$

т. е. векторы  $x^0, y^0$  удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^0 y_j \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^0 y_j^0 \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j^0. \quad (40)$$

Сравнив (40) с (34) и крайние выражения в (39), заключаем, что справедлива

**Теорема 7 (о минимаксе в теории матричных игр).** Каждая матричная игра имеет решение  $\{x^0, y^0\}$  в классе смешанных стратегий, которое совпадает с компонентами оптимальных планов линейных задач (37), (38). Значения  $\max_{x \geq 0, e'x=1} \min_{y \geq 0, e'y=1} x' Ay, \min_{y \geq 0, e'y=1} \max_{x \geq 0, ex=1} x' Ay$  всегда существуют и равны между собой:

$$\max_{x \geq 0, e'x=1} \min_{y \geq 0, e'y=1} x' Ay = \min_{y \geq 0, e'y=1} \max_{x \geq 0, ex=1} x' Ay.$$

**З а м е ч а н и е.** Число  $x^0 Ay^0$  называют ценой игры.

Таким образом, решение любой матричной игры можно найти по решению определенной задачи линейного программирования. Справедливо и обратное: каждой задаче линейного программирования соответствует матричная игра, решение которой дает оптимальный план исходной задачи.

### § 3. Двойственный симплекс-метод

Метод решения канонической задачи, описанный в § 1, впредь будем называть *прямым симплекс-методом*. Двойственный симплекс-метод — это метод построения оптимальных планов прямой канонической задачи с помощью реализации прямого симплекс-метода на двойственной канонической задаче. Под симплекс-методом теперь понимается *совокупность (пара) из прямого и двойственного симплекс-методов*. При глубоком исследовании практических задач линейного программирования обе компоненты симплекс-метода играют важную роль, дополняя одна другую.

**1. Базисный двойственный план. Коплан. Псевдоплан. Формула приращения.** Двойственный симплекс-метод представляет специальный метод решения канонической задачи

$$c'x \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

посредством преобразования планов двойственной к (1) задачи

$$b'y \rightarrow \min, \quad A'y \geq c. \quad (2)$$

При формировании в § 2 двойственной задачи (2) было показано, что оптимальному базисному плану  $x^0$  с базисной матрицей  $A_B = A(I, J_B)$  соответствует специальное решение  $y^0 = u$  двойственной задачи, удовлетворяющее

$$y^{0'} A_B = c'_B, \quad y^{0'} A_N \geq c'_N. \quad (3)$$

Имея двойственный план  $y^0$ , на котором выполняются соотношения (3), можно построить оптимальный базисный план  $x^0 = \{A_B^{-1}b, x_N = 0\}$  задачи (1), если  $A_B^{-1}b \geq 0$ .

Этот анализ показывает, что решение двойственной задачи (2), позволяющее построить оптимальный план исходной задачи (1), достаточно искать среди специальных двойственных планов, которые называются *базисными двойственными планами*.

*Определение 1.* Двойственный план  $y$  называется *базисным* с двойственной базисной матрицей  $A_B = A(I, J_B)$  если  $\det A_B \neq 0$ , и на векторе  $y$  ограничения двойственной задачи выполняются в следующем виде:

$$A'_B y = c'_B, \quad A'_N y \geq c'_N \quad (4)$$

$$(c'_B = c(J_B), \quad A_N = A(I, J_N), \quad J_N = J \setminus J_B, \quad c'_N = c(J_N)).$$

Совокупность  $\{a_j, j \in J_B\}$  столбцов двойственной базисной матрицы называют *двойственным базисом*. Базис и базисная матрица базисного плана прямой задачи (1) (см. § 1) будем называть *прямым базисом* и *прямой базисной матрицей*.

*Определение 2.* Базисный двойственный план называется *невыврожденным*, если на нем неравенство в (4) строгое.

В последующих вычислениях часто используются два вектора, связанные с базисным двойственным планом.

*Определение 3.* Вектор  $\delta = \delta(J)$ ,

$$\delta = A'y - c, \quad (5)$$

подсчитанный на двойственном плане  $y$  (т. е. при  $\delta \geq 0$ ), называется *копланом* задачи (1). *Базисный коплан* — это



коплан, соответствующий двойственному базисному плану. Он удовлетворяет соотношениям

$$\delta(J_B) = 0, \det A(I, J_B) \neq 0.$$

**Определение 4.** Вектор  $\kappa = \kappa(J)$  с компонентами

$$\kappa(J_B) = A_B^{-1} b, \kappa(J_N) = 0,$$

подсчитанный по двойственной базисной матрице  $A_B$  (базисному двойственному плану), называется *базисным псевдопланом* задачи (1).

Пусть  $y$  — базисный двойственный план с двойственной базисной матрицей  $A_B = A(I, J_B)$ . Рассмотрим другой (не обязательно базисный) двойственный план  $\bar{y} = y + \Delta y$ . Выведем формулу для приращения

$$b' \bar{y} - b' y = b' \Delta y$$

двойственной целевой функции.

Из определений коплана и базисного двойственного плана имеем

$$\begin{aligned} \Delta \delta'(J_B) &= \bar{\delta}'(J_B) - \delta'(J_B) = \bar{y}' A_B - c'(J_B) - \delta'(J_B) = \\ &= y' A_B + \Delta y' A_B - c'_B - \delta'_B = \Delta y' A_B. \end{aligned}$$

С учетом этого, привлекая определение псевдоплана, получаем искомую формулу приращения двойственной целевой функции:

$$b' \Delta y = \Delta y' A_B \kappa_B = \kappa'_B \Delta \delta(J_B) = \sum_{j \in J_B} \kappa_j \Delta \delta_j. \quad (6)$$

Из формулы (6) следует физический смысл компонент псевдоплана:  $\kappa_j$  — скорость изменения двойственной целевой функции в точке  $y$  (или, что то же самое, на соответствующем коплане  $\delta$ ) при увеличении  $j$ -й компоненты коплана  $\delta$ .

**2. Критерий оптимальности. Достаточное условие отсутствия прямых планов. Итерация.** Пусть  $y$  — базисный двойственный план с двойственной базисной матрицей  $A_B = A(I, J_B)$ ,  $\kappa = \{\kappa_B = A_B^{-1} b, \kappa_N = 0\}$  — соответствующий базисный псевдоплан.

**Теорема 1 (критерий оптимальности).** Неравенство

$$\kappa_B \geq 0 \quad (7)$$

достаточно, а в случае невырожденности и необходимо для оптимальности базисного двойственного плана  $y$ . Базисный псевдоплан, соответствующий  $y$ , является оптимальным прямым планом.

**Доказательство. Достаточность.** Для любого двойственного плана  $\bar{y} = y + \Delta y$  и соответствующего коплана  $\bar{\delta} = \delta + \Delta \delta$  имеем

$$\Delta \delta (J_B) = \bar{\delta} (J_B) - \delta (J_B) \geq 0. \quad (8)$$

Согласно (6) приращение двойственной целевой функции на векторах (7), (8) неотрицательно, что доказывает оптимальность двойственного плана  $y$ .

Каждый базисный псевдоплан, по определению, удовлетворяет основному ограничению прямой задачи (1). При выполнении (7) на нем будет выполняться прямое ограничение задачи (1), т. е.  $\kappa$  — прямой план. Поскольку

$$c' \kappa = c'_B \kappa_B = c'_B A_B^{-1} b = b' y,$$

то согласно теории двойственности (следствие 2 § 2)  $\kappa$  — оптимальный план задачи (1).

**Необходимость.** Пусть  $y$  — оптимальный невырожденный базисный двойственный план

$$\delta_H > 0, \quad (9)$$

на котором неравенство (7) не выполняется, т. е. при некотором  $i_0 \in J_B$  компонента  $\kappa_{i_0}$  отрицательна:

$$\kappa_{i_0} < 0. \quad (10)$$

Построим коплан  $\bar{\delta} = \delta + \Delta \delta$  следующим образом. Положим

$$\Delta \delta_j = \begin{cases} \sigma, & \text{если } j = i_0, \\ 0, & \text{если } j \neq i_0, j \in J_B. \end{cases} \quad (11)$$

Согласно (5) выполняется равенство  $\Delta \delta' = \Delta y' A$ . Из базисной части  $\Delta \delta'_B = \Delta y' A_B$  по известному вектору  $\Delta \delta'_B$  с компонентами (11) найдем вектор  $\Delta y' = \Delta \delta'_B A_B^{-1}$ . Тогда для компоненты  $\Delta \delta_H = \Delta \delta (J_H)$  получим формулу

$$\Delta \delta'_H = \Delta y' A_H = \Delta \delta'_B A_B^{-1} A_H. \quad (12)$$

Если, как и в прямом симплекс-методе, через  $x_{ij}$ ,  $i \in J_B$ ,  $j \in J_H$ , обозначить  $i$ -ю компоненту вектора  $A_B^{-1} a_j$ , то фор-

мула (12) с учетом (11) в компонентной записи примет вид

$$\Delta\delta_j = \sigma x_{i_0j}, \quad j \in J_H. \quad (13)$$

Из (11), (13) видно, что в силу (9) найдется такое достаточно малое положительное число  $\sigma > 0$ , при котором выполняются неравенства  $\bar{\delta}_j = \delta_j + \Delta\delta_j \geq 0$ ,  $j \in J$ , т. е.  $\bar{\delta}$  — коплан задачи (1), соответствующий двойственному плану  $\bar{y} = y + \Delta y$ . Для последнего из формулы приращения (6) в силу (10), (11) получаем неравенство

$$b'\bar{y} - b'y = \kappa_{i_0} \Delta\delta_{i_0} = \sigma \kappa_{i_0} < 0, \quad (14)$$

которое противоречит предположению об оптимальности двойственного плана  $y$ . Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда критерий оптимальности (7) не выполняется и некоторой отрицательной компоненте (10) псевдоплана соответствуют неотрицательные числа

$$x_{i_0j} \geq 0, \quad j \in J_H. \quad (15)$$

Тогда согласно (11), (13), (15) при любых  $\sigma \geq 0$  вектор  $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$  будет копланом задачи (1). Из (14) следует, что с увеличением  $\sigma$  двойственная целевая функция неограниченно убывает ( $b'\bar{y} \rightarrow -\infty$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ ). Согласно следствию 2 из § 2 это означает, что доказана

**Теорема 2 (достаточное условие отсутствия прямых планов).** Если при некотором  $i_0 \in J_B$  выполняются неравенства (10), (15), то ограничения прямой задачи (1) противоречивы.

Осталось рассмотреть случай, когда для каждой отрицательной компоненты (10) псевдоплана неравенства (15) не выполняются, т. е.  $x_{i_0j} < 0$  при некотором  $j \in J_H$ . В этом случае при увеличении  $\sigma$  компонента  $\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma x_{i_0j}$  при

$$\sigma_j = -\delta_j / x_{i_0j} \quad (16)$$

обратится в нуль, а при  $\sigma > \sigma_j$  станет отрицательной. Отсюда следует, что максимально допустимое значение  $\sigma^0$ , при котором вектор  $\bar{\delta}$  остается копланом, равно

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = -\delta_{j_0} / x_{i_0j_0} = \min_{x_{i_0j} < 0, j \in J_H} (-\delta_j / x_{i_0j}). \quad (17)$$

Для этого значения  $\sigma$  двойственная целевая функция при замене  $y \rightarrow \bar{y}$  согласно (14) уменьшится на максимальную величину  $|\sigma^0 \kappa_{i_0}|$ , которая будет положительной, если  $y$  — невырожденный базисный двойственный план.

Докажем, что двойственный план  $\bar{y} = y + \Delta y$ , соответствующий построенному коплану  $\bar{\delta}$ , является базисным. У коплана  $\bar{\delta}$  согласно (11) только одна компонента  $\bar{\delta}_{i_0}$  из  $\bar{\delta}_j, j \in J_B$ , может оказаться (при  $\sigma^0 > 0$ ) ненулевой. Но вместо нее среди  $\bar{\delta}_j, j \in J_N$ , обязательно появится нулевая компонента

$$\bar{\delta}_{j_0} = \delta_{j_0} + \sigma^0 \kappa_{i_0 j_0} = \delta_{j_0} - \delta_{j_0} \cdot \kappa_{i_0 j_0} / \kappa_{i_0 j_0} = 0.$$

Следовательно, у вектора  $\bar{\delta}$ , как и у  $\delta$ ,  $m$  нулевых компонент:  $\bar{\delta}(\bar{J}_B) = 0, \bar{J}_B = (J_B \setminus i_0) \cup j_0; \bar{\delta}(\bar{J}_N) \geq 0, \bar{J}_N = (J_N \setminus j_0) \cup i_0$ . Матрица  $A(I, \bar{J}_B)$  получается из  $A_B$  заменой столбца  $a_{i_0}$  на столбец  $a_{j_0}$ , причем согласно (17) выполняется соотношение  $\kappa_{i_0 j_0} \neq 0$ . В § 1 доказано, что  $A(I, \bar{J}_B)$  — неособая матрица. Таким образом,  $\bar{\delta}$  — базисный коплан с двойственной базисной матрицей  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ . Формулы для элементов матрицы, обратной к  $\bar{A}_B$ , приведены в § 1. Переход от старого базисного коплана  $\delta$  к новому базисному  $\bar{\delta}$  называется *итерацией двойственного симплекс-метода*, который, по определению, представляет совокупность последовательно осуществленных итераций указанного типа.

**З а м е ч а н и я.** 1. Выше индекс  $i_0$  мог принадлежать любой отрицательной компоненте псевдоплана. Часто используется следующее правило:

$$\kappa_{i_0} = \min \kappa_j, \quad j \in J_B.$$

2. Двойственный симплекс-метод получен с помощью техники § 1. Другой способ состоит в реализации прямого симплекс-метода для двойственной задачи (2) после приведения ее к канонической форме. Если учесть специальную структуру получающейся матрицы условий, то придем к изложенному выше методу. Оба приема в некотором сочетании будут использованы в § 4 при исследовании транспортных задач.

**3. Алгоритм.** Опишем алгоритм двойственного симплекс-метода в терминах обратной двойственной базисной матрицы  $A_B^{-1}$ .

*1-я итерация.* На первой итерации известны множество  $J_B^1$ , матрица  $(A_B^{-1})_1$ , обратная к начальной двойственной

базисной матрице  $(A_B)_1 = A(I, J_B^1)$ , и небазисные компоненты  $\delta^1 (J_N^1) = c' (J_B^1) (A_B^{-1})_1 A(I, J_N^1) - c' (J_N^1)$ ,  $J_N^1 = J \setminus J_B^1$ , начального базисного коплана.

*k-я итерация.* Пусть на  $k$ -й итерации известны множество  $J_B^k$ , матрица  $(A_B^{-1})_k$ , обратная к двойственной базисной матрице  $A(I, J_B^k)$ , и небазисные компоненты  $\delta^k (J_N^k)$ ,  $J_N^k = J \setminus J_B^k$ , соответствующего базисного коплана.

1) Вычислим вектор  $\kappa (J_B^k) = (A_B^{-1})_k b$ .

2) Если среди чисел  $\kappa_j$ ,  $j \in J_B^k$ , нет отрицательных, то процесс решения задачи (1) заканчивается на оптимальном плане

$$x^0 = \{x^0 (J_B^k) = \kappa (J_B^k), x^0 (J_N^k) = 0\}.$$

3) Если среди чисел  $\kappa_j$ ,  $j \in J_B^k$ , есть отрицательные, то выберем среди них  $\kappa_{i_0} < 0$ ,  $i_0 = i_0(k)$ .

4) Вычислим компоненты  $x_{i_0j}$ ,  $j \in J_N^k$ , вектора  $[A_B^{-1}(i_0, I)]_k A(I, J_N^k)$ , где через  $[A_B^{-1}(i_0, I)]_k$  обозначена  $i_0$ -я строка матрицы  $(A_B^{-1})_k$ .

5) Если среди чисел  $x_{i_0j}$ ,  $j \in J_N^k$ , нет отрицательных, то процесс решения заканчивается: исходная задача (1) не имеет прямых планов.

6) Если среди чисел  $x_{i_0j}$ ,  $j \in J_N^k$ , есть отрицательные, то для каждого  $x_{i_0j} < 0$ ,  $j \in J_N^k$ , вычислим числа  $\sigma_j = -\delta_j / x_{i_0j}$  и среди них найдем минимальное:  $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$ ,  $j_0 = j_0(k)$ .

7) Множества  $J_B^k$ ,  $J_N^k$  заменим на новые:  $J_B^{k+1} = (J_B^k \setminus i_0) \cup j_0$ ,  $J_N^{k+1} = (J_N^k \setminus j_0) \cup i_0$ .

8) Вычислим небазисные компоненты нового базисного коплана:  $\delta_j^{k+1} = \delta_j^k + \sigma^0 x_{i_0j}$ ,  $j \in J_N^{k+1} \setminus j_0$ ,  $\delta_{i_0}^{k+1} = \sigma^0$ .

9) По формулам (32) § 1 вычислим элементы  $u_{ij}$ ,  $i \in J_B$ ,  $j \in I$ , матрицы  $(A_B^{-1})_{k+1}$ , считая в (32) § 1, что  $J_B = J_B^k$ ;  $u_{ij}$ ,  $i \in J_B$ ,  $j \in I$ , — элементы матрицы  $(A_B^{-1})_k$ .

10) Переходим к  $(k+1)$ -й итерации.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.4.

**4. Пример (задача о диете).** Табличная реализация двойственного симплекс-метода. Требуется приготовить наиболее дешевую пищу, которая должна содержать  $m$  питательных веществ не менее заданных количеств  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Питательные вещества в разных пропорциях имеются в продуктах, которые нужно закупить. Содержание  $i$ -го вещества в единице (веса, объема и т. п.)  $j$ -го продукта равно  $a_{ij}$ . Стоимость единицы  $j$ -го продукта равна  $c_j$ .

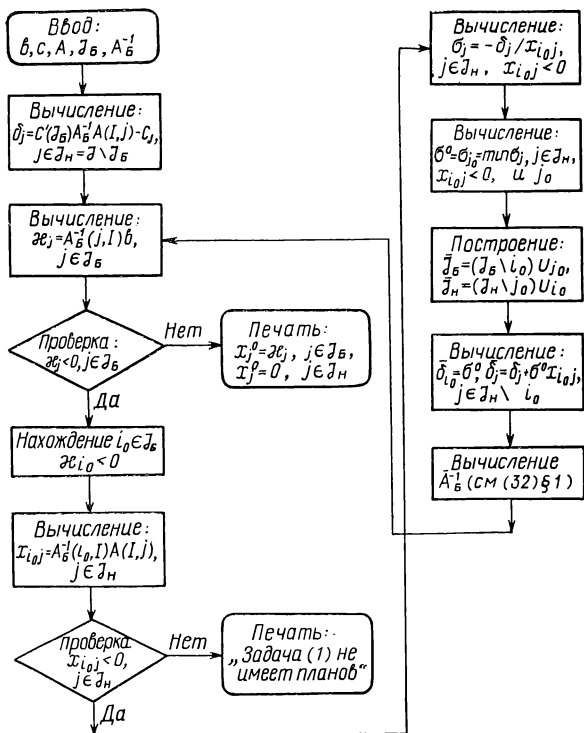


Рис. 1.4

Особенность каждой задачи о диете (и подобных ей разнообразных задач о смесях) состоит в том, что для нее всегда просто строится начальный базисный двойственный план. Это позволяет эффективно решать эти задачи двойственным симплекс-методом.

Для иллюстрации двойственного симплекс-метода решим вручную пример задачи о диете с данными из табл. 1.5.

Табл. 1.5

№ продукта № вещества	1	2	3	Нижние пределы содержания веществ
1	2	3	1	2
2	1	1	0	3
3	3	0	1	1
4	0	1	2	2
Стоимость единицы продукта	1	3	1	

Обозначим через  $x_j \geq 0$  количество закупаемого  $j$ -го продукта,  $j=1, 2, 3$ ; тогда  $c_j x_j$  — его стоимость, а  $x_1 + 3x_2 + x_3$  (согласно табл. I.5) — стоимость пищи. Содержание  $i$ -го вещества в закупленном  $j$ -м продукте равно  $a_{ij} x_j$ . Поэтому (табл. I.5)  $2x_1 + 3x_2 + x_3$  — количество первого вещества в пище.

Аналогично подсчитывается содержание других веществ. Сгласовав эти вычисления с нижними пределами содержания питательных веществ в пище, получим следующую математическую модель задачи о диете (в условиях рассматриваемого примера):

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\rightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ 3x_1 + x_3 &\geq 1, \\ x_2 + 2x_3 &\geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Запишем эту задачу в канонической форме:

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 - x_3 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_5 &= 3, \\ 3x_1 + x_3 - x_6 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_7 &= 2, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7}. \end{aligned} \quad (18)$$

Задача, двойственная к (18), имеет вид

$$\begin{aligned} 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 &\rightarrow \min, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq -1, \\ 3y_1 + y_2 + y_4 &\geq -3, \\ y_1 + y_3 + 2y_4 &\geq -1, \\ -y_1 &\geq 0, \\ -y_2 &\geq 0, \\ -y_3 &\geq 0, \\ -y_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вектор  $\{0, 0, 0, 0\}$  является базисным двойственным планом задачи (18) с отрицательной единичной диагональной двойственной базисной матрицей

$$A_B = \{a_4, a_5, a_6, a_7\} = -E.$$

Подсчитаем компоненты начального базисного коплана  $\delta = \{1, 3, 1, 0, 0, 0, 0\}$ .

Для осуществления итерации двойственного симплекс-метода нет необходимости строить новую таблицу для двойственной задачи. Для этой цели пригодна слегка измененная старая симплексная таблица для прямой задачи (табл. I.2). В этой таблице удален  $\Theta$ -столбец,  $\Delta$ -строка заменена на  $\delta$ -строку, добавлена  $\sigma$ -строка. Основная часть табл. I.6 заполняется так же, как табл. I.2. Поскольку на-

Табл. I.6

$b, a_j$ Базис	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_4$	-2	-2	-3	-1	1	0	0	0
$a_5$	-3	-1	-1	0	0	1	0	0
$a_6$	-1	-3	0	-1	0	0	1	0
$a_7$	-2	0	-1	-2	0	0	0	1
$\delta$		1	3	1	0	0	0	0
$\sigma$		1	3					

чальная матрица  $A_B$  представляет не  $E$ , а  $-E$ , то параметры задачи (18) в табл. I.6 занесены с противоположными знаками. Строка  $\delta$  заполняется компонентами текущего коплана.

Анализ табл. I.6 начинается с  $b$ -столбца, содержащего базисные компоненты псевдоплана. Поскольку ни для одной строки не выполняются условия теоремы 2 (в каждой строке с  $x_i < 0$  имеются отрицательные элементы), то перейдем к описанию итерации. Найдем минимальный элемент  $b$ -столбца:  $x_{i_0} = x_5 = -3$ . Поскольку он оказался отрицательным, то начальный базисный коплан неоптимален. Строка с  $x_{i_0}$  называется *ведущей*. По каждому отрицательному элементу  $x_{i_0j}$  ведущей строки вычислим отношения  $-\delta_j/x_{i_0j}$  (см. (16)) и результаты занесем в  $\sigma$ -строку. Минимальный элемент  $\sigma^0 = \sigma_1 = 1$  соответствует числу (17). Столбец с  $\sigma_{j_0}$  — *ведущий*. Элемент  $x_{i_0j_0}$ , как и в прямом симплекс-методе, называется *ведущим*. Вектор  $a_{i_0}$  удалим из двойственного базиса, заменив на вектор  $a_{j_0}$ . Эта операция осуществляется по правилам прямоугольника, примененного ко всем строкам (кроме  $\sigma$ -строки) табл. I.6. Построением новой табл. I.7

Табл. I.7

$b, a_j$ Базис	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_4$	4	0	-1	-1	1	-2	0	0
$a_1$	3	1	1	0	0	-1	0	0
$a_6$	8	0	3	-1	0	-3	1	0
$a_7$	-2	0	-1	-2	0	0	0	1
$\delta$		0	2	1	0	1	0	0
$\sigma$			2	1/2				



Табл. 1.8

$\begin{matrix} b, a_j \\ \text{базис} \end{matrix}$	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_4$	5	0	-1/2	0	1	-2	0	-1/2
$a_1$	3	1	1	0	0	-1	0	0
$a_6$	9	0	7/2	0	0	-3	1	-1/2
$a_3$	1	0	1/2	1	0	0	0	-1/2
$\bar{b}$		0	3/2	0	0	1	0	1/2

завершается одна итерация двойственного симплекс-метода. Результаты следующей итерации помещены в табл. 1.8, удовлетворяющей критерию оптимальности. Из этой таблицы выпишем компоненты оптимального плана задачи (18):  $x_1^0 = 3$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = 1$ ,  $x_4^0 = 5$ ,  $x_5^0 = 0$ ,  $x_6^0 = 9$ ,  $x_7^0 = 0$ .

**5. Анализ чувствительности.** При решении прикладных задач часто представляет интерес оптимальный план не для одной совокупности параметров задачи, а для целого множества их. Исследование влияния вариаций параметров  $A$ ,  $b$ ,  $c$  на решение задачи называется анализом чувствительности. При изучении этой проблемы важную роль играет двойственный симплекс-метод. Для иллюстрации начал анализа чувствительности рассмотрим и изложим метод коррекции оптимальных планов при вариации объемов ресурсов (вектора  $b$ ) в производственной задаче.

Обратимся к примеру из § 1. Там получен (табл. 1.4) оптимальный базисный план  $x^0$  производства для следующих объемов трех ресурсов  $b = \{200, 500, 700\}$ . Из табл. 1.4 можно извлечь матрицу  $A_B^{-1}$ , обратную к прямой базисной матрице плана  $x^0$ . Ее столбцы, по определению, состоят из элементов в столбцах табл. 1.4 с единичными векторами условий

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что объем 2-го ресурса изменился с 500 до 800, т. е.  $\bar{b} = \{200, 800, 700\}$ . Его влияние на целевую функцию можно в первом приближении оценить с помощью оптимальных потенциалов плана  $x^0$  (см. п. 3 § 2). В данном пункте найдем оптимальный план для новых

Табл. 1.9

$b, a_j$ базис	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	120	1	7/2	0	7/2	0
$a_3$	80	0	1/2	1	1/2	0
$a_5$	-100	0	-5	0	5	1
$\delta$		0	15	0	30	0
$\bar{b}$			3			

↑

условий, что позволит дать точный ответ. Начинать решение с первой фазы прямого симплекс-метода часто нецелесообразно из-за больших затрат времени. В этих случаях гораздо эффективнее двойственный симплекс-метод. В табл. 1.4 элементы  $\Delta$ -строки составляют базисный коплан  $\delta = \{0, 15, 0, 30, 0\}$  с двойственной базисной матрицей  $A_B$ . Поэтому после замены элементов  $b$  столбца компонентами вектора

$$A_B^{-1} \bar{b} = \{120, 80, -100\}$$

получим начальную таблицу (табл. 1.9) для применения двойственного симплекс-метода.

**Замечание.** Если вектор  $A_B^{-1} \bar{b}$  оказался неотрицательным, то  $\bar{x}^0 = x_b^0 = \{A_B^{-1} \bar{b}, \bar{x}_H = 0\}$  — оптимальный план для новых условий и никаких итераций не требуется.

Одна итерация двойственного симплекс-метода, примененная к табл. 1.9, приводит к табл. 1.10 с оптимальным планом  $\bar{x}^0 = \{50, 20, 70, 0, 0\}$ .

Табл. 1.10

$b, a_j$ базис	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	50	1	0	0	7	7/10
$a_3$	70	0	0	1	1	1/10
$a_2$	20	0	1	0	-1	-1/5
$\delta$		0	0	0	45	3

**6. Изменение размеров задачи.** Размер задачи линейного программирования характеризуется числом  $n$  переменных и числом  $m$  основных ограничений. В приложениях нередко возникает потребность решения задач, размеры которых мало отличаются от размера задачи с известным оптимальным планом. Умелое применение прямого и двойственного симплекс-методов позволяет эффективно использовать априорную информацию.

На языке производственной задачи (§ 1) увеличение числа переменных означает введение в план производства предприятия новой продукции, уменьшение числа переменных — исключение какой-то продукции из плана. Если продукция предприятия станет проходить дополнительную обработку, то для математической модели увеличится число основных ограничений. Число основных ограничений уменьшится, если исключить какой-нибудь вид обработки продукции.

Остановимся подробнее на случае увеличения числа основных ограничений. Пусть  $x^0$  — оптимальный план задачи (1),  $A_B = A(I, J_B)$ ,  $u = u(I)$  — ее базисная матрица и вектор потенциалов. Предположим, что к основным ограничениям добавлено дополнительное

$$a'x \leq \beta, \quad \beta \geq 0. \quad (19)$$

Если  $a'x^0 \leq \beta$ , то, очевидно, вектор  $x^0$  останется оптимальным планом и в задаче (1), (19). Пусть  $a'x^0 > \beta$ . После приведения задачи (1), (19) к канонической форме ее  $(m+1) \times (n+1)$ -матрица условий принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{Bmatrix} A & 0 \\ a' & 1 \end{Bmatrix} = \{\tilde{a}_j, j \in \tilde{J} = J \cup (n+1)\}.$$

Положим

$$\tilde{A}_B = \begin{Bmatrix} A_B & 0 \\ a'_B & 1 \end{Bmatrix}, \quad a_B = a(J_B). \quad (20)$$

Легко проверить, что

$$\tilde{A}_B^{-1} = \begin{Bmatrix} A_B^{-1} & 0 \\ -a'_B A_B^{-1} & 1 \end{Bmatrix}.$$

Найдем  $(m+1)$ -вектор  $\tilde{u}' \{c(J_B), 0\}' \tilde{A}_B^{-1} = \{u(I), 0\}'$ .

Отсюда

$$\tilde{\Delta}_j = \tilde{u}' a_j - \tilde{c}_j = \begin{cases} \Delta_j, & j \in J, \\ 0, & j = n+1 \end{cases}; \quad \tilde{c}_j = c_j, \quad j \in J; \quad \tilde{c}_{n+1} = 0;$$

$$\Delta_j = u' a_j - c_j.$$

Поскольку в силу оптимальности плана  $x^0$  оценки  $\Delta_j$ ,  $j \in J$ , неотрицательны, то  $\tilde{\Delta}_j \geq 0$ ,  $j \in \tilde{J}$ , и  $\tilde{\Delta}_j \equiv 0$ ,  $j \in \tilde{J}_B = J_B \cup (n+1)$ , т. е.  $\tilde{u}$  — двойственный базисный план задачи (1), (19) с базисной матрицей (20). Построим соответствующий ему базисный псевдоплан  $\tilde{x} = \{\tilde{x}_B, \tilde{x}_N = 0\}$ ,

$$\tilde{x}_B = \tilde{A}_B^{-1} \tilde{b} = \begin{Bmatrix} A_B^{-1} & 0 \\ -a'_B A_B^{-1} & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ -a'_B A_B^{-1} b + \beta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x_B^0 \\ -a' x^0 + \beta \end{Bmatrix}.$$

У  $(m+1)$ -вектора  $\tilde{x}_B$  компонента  $\tilde{x}_{m+1} = -a' x^0 + \beta < 0$  отрицательна, т. е.  $\tilde{u}$  — неоптимальный двойственный базисный план. Для построения оптимального двойственного плана задачи (1), (19) вычисления продолжаем, следуя двойственному симплекс-методу.

В качестве упражнения предлагается изложенным методом построить оптимальный план в примере из § 1 при условии, что все типы продукции предприятия проходят дополнительную обработку, для чего привлекается ресурс четвертого типа объемом 400 единиц. Известно, что на дополнительную обработку единицы продукции первого и четвертого типов расходуется одна единица ресурса четвертого типа, второго и третьего типов — две единицы.

#### § 4. Транспортные задачи

Транспортными задачами линейного программирования называют математические модели разнообразных прикладных задач по оптимизации перевозок продуктов. К ним сводятся многочисленные задачи, имеющие другую физическую природу. Распространенность в приложениях задач транспортного типа оправдывает неослабевающие

усилия по созданию новых методов их решения. В данном параграфе для решения транспортных задач в *сетевой* и *матричной формах* строится *метод потенциалов* как реализация прямого симплекс-метода, детально учитывающая специфику новых задач.

**1. Сеть. Поток. Сетевая транспортная задача.** Рассмотрим множество  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  элементов, которые назовем *узлами*. Для наглядности будем интерпретировать его как совокупность  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  населенных пунктов. Предположим, что некоторые пары узлов  $i, j \in I$  упорядочены. Каждую такую пару обозначим символом  $(i, j)$  и назовем *дугой с началом  $i$  и концом  $j$* . В физической интерпретации дуга  $(i, j)$  представляет дорогу из пункта  $A_i$  в пункт  $A_j$ . Множество дуг, определенных на  $I \times I$ , обозначим через  $U$ .

**Определение 1.** Совокупность  $S = \{I, U\}$  называется (*ориентированной*) *сетью*.

На рисунках узлы будут обозначаться точками, дуги  $(i, j)$  — линиями со стрелкой из  $i$  в  $j$ . На физическом языке сеть — совокупность населенных пунктов с сетью дорог между ними.

Каждому узлу  $i \in I$  припишем число  $a_i$  — *интенсивность узла*. При  $a_i > 0$  узел  $i$  называется *источником* ( $A_i$  — *пункт производства* некоторого продукта,  $a_i$  — *объем производства* в нем), при  $a_i < 0$  — *стоком* ( $A_i$  — *пункт потребления*,  $|a_i|$  — *объем потребления*). Узлы  $i$  с  $a_i = 0$  называются *нейтральными* (*транзитными, промежуточными*). На рисунках источники и стоки отмечаются стрелками, входящими в узел-источник или выходящими из узла-стока. Около стрелок записываются абсолютные значения интенсивностей. Нейтральные узлы на рисунках не отмечаются.

Каждой дуге  $(i, j) \in U$  припишем неотрицательное число  $x_{ij}$  — *дуговой поток* (*поток по дуге  $(i, j)$* ), который в принятой интерпретации означает количество продукта, транспортируемого из  $A_i$  в  $A_j$ .

Пусть  $I_i^+ = I_i^+(U) = \{j: (i, j) \in U\}$ ,  $I_i^- = I_i^-(U) = \{j: (j, i) \in U\}$  — множества узлов, которые соединены с узлом  $i$  дугами из  $U$ , начинающимися в  $i$  ( $I_i^+$ ) или оканчивающимися в  $i$  ( $I_i^-$ ). Говорят, что выполнено *условие баланса в узле  $i$* , если

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad (1)$$

т. е. количество продукта, поступающего в пункт  $A_i$  и производимого в нем, равно количеству продукта, вывозимого из  $A_i$  и потребляемого в нем.

**Определение 2.** Совокупность  $x = \{x_{ij} : (i, j) \in U\}$  дуговых потоков называется *потоком на сети*  $S = \{I, U\}$  (*сетевым потоком*), если она удовлетворяет условию баланса (1) в каждом узле  $i \in I$ .

Дугам  $(i, j) \in U$  припишем еще одну характеристику  $c_{ij}$  — *стоимость единичного* ( $x_{ij}=1$ ) *дугового потока*.

Число  $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}$  назовем *стоимостью потока*  $x$ . На физическом языке стоимость потока — это величина транспортных расходов (издержек) на плане перевозок  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ , осуществляемых по заданной сети дорог.

*Сетевая транспортная задача* (*транспортная задача в сетевой форме*), именуемая также *задачей о потоке минимальной стоимости*, состоит в поиске *оптимального потока*  $x^0$  (*потока минимальной стоимости*), который доставляет решение задаче

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad \sum_{i \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I;$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U. \quad (2)$$

Целевая функция и все функции ограничений (типа равенств и неравенств) задачи (2) линейны относительно переменных  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , т. е. (2) — задача линейного программирования. Но (2) — специальная задача линейного программирования: при ее сведении к канонической форме получается большая матрица условий специальной структуры, состоящая только из единиц (плюс-минус) и большого количества нулей. Поэтому сводить задачу (2) к канонической и решать ее симплекс-методом нецелесообразно. В данном параграфе излагается другой, эффективный, метод решения транспортных задач, который называется *методом потенциалов* и является реализацией основной идеи прямого симплекс-метода непосредственно на модели (2).

**2. Базисный поток.** Предварительно введем необходимые сетевые понятия. Дугу  $(i, j)$ , лишенную ориентации, назовем *ребром*  $\{i, j\}$  с граничными узлами  $i, j$ . Узел сети — *висячий*, если он граничен для единственного (висячего) ребра. Последовательность различных ребер  $\{i_1, i_2\}$ ,

$\{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}$ , в которой соседние ребра имеют общие граничные узлы, называется (*простой*) *цепью*, соединяющей узлы  $i_1, i_k$ . Если в последовательности узлов  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  этой цепи нет одинаковых, то цепь будем считать *элементарной*. Выберем направление движения вдоль цепи. Если это направление совпадает с направлением  $i \rightarrow j$  дуги  $(i, j)$ , соответствующей ребру  $\{i, j\}$  цепи, то  $(i, j)$  — *прямая дуга*. Дуга с противоположным направлением — *обратная*. Сеть назовем *связной*, если любые ее два узла можно соединить цепью. В дальнейшем будут, как правило, рассматриваться только простые элементарные цепи и связные сети.

Цепь  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  с совпадающими узлами  $i_1, i_k$  назовем *циклом*.

**Лемма 1.** Сеть без циклов содержит висячее ребро.

Действительно, пусть  $i_1$  — произвольный узел сети. Если он не висячий, то из связности сети следует существование ребра  $\{i_1, i_2\}$ . Если и узел  $i_2$  не висячий, то найдется ребро  $\{i_2, i_3\}$ , причем  $i_3 \neq i_1$ , поскольку в сети нет циклов. Продолжая этот процесс, через конечное число шагов обнаружим висячий узел и соответствующее ему висячее ребро. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Удаление висячего ребра (вместе с висячим узлом) или ребра из цикла не нарушает связности сети.

Доказательство леммы 2 оставляется читателю.

Сеть  $S = \{I, U\}$  называется *деревом*, если  $|I| = |U| + 1$ .

**Лемма 3.** Сеть является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.

**Доказательство. Достаточность.** По лемме 1 в сети найдется висячее ребро. Удалим его вместе с соответствующим висячим узлом. Оставшаяся сеть согласно лемме 2 опять будет связной и, понятно, без циклов. У нее удалим висячее ребро и висячий узел. Через  $|I| - 2$  шага останутся два узла, граничных для единственного ребра. Таким образом,  $|I| = |U| + 1$ .

**Необходимость.** Предположим, что у дерева есть цикл. Этот цикл не может составить все дерево, так как у него число ребер равно числу узлов. Среди узлов и ребер, не входящих в рассматриваемый цикл, удалим все висячие узлы и соответствующие им висячие ребра. Если оставшиеся ребра образуют еще один цикл, то удалим в нем ребро, не входящее в рассматриваемый цикл. При этом число узлов не изменится, а число ребер сократится на единицу. Продолжив этот процесс, через конечное число

шагов из исходной сети выделим рассматриваемый цикл. В нем число узлов равно числу ребер. Следовательно, в исходной сети-дереве число ребер было не меньше числа узлов:  $|U| \geq |I|$ . Противоречие доказывает лемму.

**Лемма 4.** Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.

Для сети  $S = \{I, U\}$  сеть  $S^* = \{I, U^*\}$ , где  $U^* \subset U$ , называется частичной сетью. Частичная сеть, являющаяся деревом, называется деревом сети  $S$ .

**Лемма 5.** Пусть  $S^*$  — дерево сети. При любой дуге  $(i, j) \in U$ ,  $(i, j) \notin U^*$ , частичная сеть  $S_1 = \{I, U_1\}$ ,  $U_1 = U^* \cup (i, j)$ , содержит ровно один цикл.

**Доказательство.** Существование циклов в  $S_1$  следует из леммы 3. Если их больше одного, то удалим в одном, фиксированном, цикле ребро, не входящее хотя бы в один из других циклов. Для оставшейся частичной сети  $S_2 = \{I, U_2\}$  имеем  $|I| = |U_2| + 1$ , т. е.  $S_2$  — дерево с циклами. Противоречие доказывает лемму.

Перейдем к основному вопросу пункта. В симплекс-методе используется *полная система* линейно независимых векторов. Напомним: среди векторов условий  $a_j$ ,  $j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , канонической задачи векторы  $\{a_j, j \in J_B\}$ ,  $J_B \subset J$ , образуют полную (линейно независимую) систему векторов, если уравнение  $\sum_{j \in J_B} a_j x_j = 0$  имеет

только нулевое решение  $x_j = 0$ ,  $j \in J_B$ , но при любом  $j_* \in J$ ,  $j_* \notin J_B$ , имеет ненулевое решение  $x_j \neq 0$ ,  $j \in J_B \cup j_*$ , уравнение  $\sum_{j \in J_B} a_j x_j + a_{j_*} x_{j_*} = 0$ .

Следуя этому, введем для задачи (2)

**Определение 3.** Множество дуг  $U_B \subset U$  сети  $S = \{I, U\}$  называется *полным*, если система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B)} x_{ji} = 0, \quad i \in I,$$

имеет только нулевое решение  $x_{ij} = 0$ ,  $(i, j) \in U_B$ , но для любой дуги  $(i_*, j_*) \in U$ ,  $(i_*, j_*) \notin U_B$ , имеет ненулевое решение  $x_{ij} \neq 0$ ,  $(i, j) \in U_B \cup (i_*, j_*)$ , система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B \cup (i_*, j_*))} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B \cup (i_*, j_*))} x_{ji} = 0, \quad i \in I.$$

Прежде чем сформулировать критерий полноты множества дуг, введем дополнительные понятия. Совокуп-



ность  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ , для которой в каждом узле  $i \in I$  выполняется равенство (1), назовем *псевдопоток*.

**Лемма 6.** Сеть с нулевыми интенсивностями узлов ( $a_i = 0, i \in I$ ) допускает бесконечное число псевдопоток, если в ней имеется цикл.

**Доказательство.** Положим  $x_{ij} = 0$  для всех ребер  $\{i, j\}$ , не входящих в цикл. Выберем направление обхода цикла по направлению  $i_0 \rightarrow j_0$  дуги  $(i_0, j_0)$ , соответствующей ребру  $\{i_0, j_0\}$  цикла. Для ребра  $\{i, j\}$  цикла положим:  $x_{ij} = \Theta$ , если  $(i, j)$  — прямая дуга;  $x_{ij} = -\Theta$ , если  $(i, j)$  — обратная дуга. При любом  $\Theta$  построенная совокупность  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$  удовлетворяет равенствам (1),  $i \in I$ . Лемма доказана.

Псевдопоток, найденный при доказательстве леммы 6, называется  $(i_0, j_0)$ -циркуляцией со значением  $\Theta$ .

**Теорема 1 (критерий полноты множества дуг).** В сети  $S = \{I, U\}$  множество  $U_B \subset U$  является полным в том и только том случае, когда  $S_B = \{I, U_B\}$  — дерево сети.

**Доказательство.** *Достаточность.* В  $S_B$  найдем висячий узел. Из условия баланса в этом узле следует, что псевдопоток вдоль соответствующего ему висячего ребра равен нулю. Удалим висячий узел и ребро и повторим операции. Через  $|I| - 1$  шаг получим нулевой псевдопоток на  $S_B$ . Если к  $S_B$  добавить любую дугу  $(i, j) \in U$ ,  $(i, j) \notin U_B$ , то в силу леммы 5 получится цикл, вследствие чего (лемма 6) возникнет  $\Theta$ -циркуляция,  $\Theta > 0$ . Таким образом,  $U_B$  — полное множество дуг.

*Необходимость.* Пусть  $U_B$  — полное множество дуг. Совокупность  $S_B = \{I, U_B\}$  не может содержать циклов, ибо согласно лемме 6 на каждом цикле существует ненулевой псевдопоток. Сеть  $S_B$  — связная, ибо в противном случае добавление к  $U_B$  дуги  $(i_0, j_0) \in U$  без образования циклов (что в несвязной сети всегда возможно) ведет к равенству  $x_{i_0 j_0} = 0$ , которое следует из условия баланса в узле  $i_0$ . Таким образом, согласно лемме 3  $S_B$  — дерево сети. Теорема доказана.

**Определение 4.** Поток  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U_B\}$  называется *базисным*, если  $x_{ij} \equiv 0, (i, j) \in U_N, U_N = U \setminus U_B, U_B$  — полное множество дуг.

Дуговые потоки  $x_{ij}, (i, j) \in U_B$ , — базисные;  $x_{ij}, (i, j) \in U_N$ , — небазисные дуговые потоки.

**Определение 5.** Базисный поток называется *невыврожденным*, если все его базисные дуговые потоки положительны.

Множество дуг  $U_B$ , удовлетворяющее условиям определения 4, назовем базисным.

**З а м е ч а н и е.** Базисное множество  $U_B$  (как и базисную матрицу в симплекс-методе) можно положить в основу определения базисного потока. Пусть на сети  $S = \{I, U\}$  выделено полное множество  $U_B$ . Тогда  $S_B = \{I, U_B\}$  — дерево сети (лемма 3). Положим  $x_{ij} \equiv 0$ ,  $(i, j) \in U_H$ ,  $U_H = U \setminus U_B$ . В  $S_B$  найдем висячий узел  $i_1$  и дугу  $(i_1, i_2)$ , соответствующую висящему ребру  $\{i_1, i_2\}$ . По интенсивности  $a_{i_1}$  с помощью условия баланса в  $i_1$  найдем дуговой поток  $x_{i_1 i_2} = a_{i_1}$ . Из множества  $U_B$  удалим дугу  $(i_1, i_2)$ . Совокупность  $S_B^1 = \{I \setminus i_1, U_B \setminus (i_1, i_2)\}$  опять образует дерево (лемма 2). Характеристики его элементов сохраним прежними, изменив только интенсивность узла  $i_2$  с  $a_{i_2}$  на  $\bar{a}_{i_2}$ :

$$\bar{a}_{i_2} = \begin{cases} a_{i_2} + x_{i_1 i_2}, & \text{если ребру } \{i_1, i_2\} \text{ соответствует дуга } (i_1, i_2), \\ a_{i_2} - x_{i_2 i_1}, & \text{если ребру } \{i_1, i_2\} \text{ соответствует дуга } (i_2, i_1). \end{cases}$$

С деревом  $S_B^1$  поступаем так же, как с  $S_B$ . Через  $n-1$  шаг будут построены дуговые потоки  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \in U_B$ , вдоль всех дуг из полного множества дуг  $U_B$ . В совокупности с  $x_{ij} \equiv 0$ ,  $(i, j) \in U_H$ , они составляют, очевидно, псевдопоток на сети  $S$ . Полное множество  $U_B$  называется базисным, если построенный псевдопоток является потоком, т. е.  $x_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in U_B$ . Ясно, что этот поток будет базисным (определение 4), соответствующим базисному множеству  $U_B$ .

**3. Формула приращения стоимости потока.** Пусть  $U_B$  — базисное множество дуг и  $x$  — соответствующий ему базисный поток в задаче (2). Рассмотрим другой (не обязательно базисный) поток  $\bar{x} = x + \Delta x$ . Найдем формулу для приращения

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \bar{x}_{ij} - \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij}$$

стоимости потока.

Каждому узлу  $i \in I$  сети  $S = \{I, U\}$  припишем число  $u_i$  (*потенциал узла*) так, чтобы совокупность  $\{u_i, i \in I\}$  удовлетворяла системе уравнений (*потенциалов*)

$$0 = u_i - u_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_B. \quad (3)$$

Покажем, что искомые числа  $u_i$ ,  $i \in I$ , существуют. Выберем произвольный узел  $i_1 \in I$  и положим  $u_{i_1} = 0$ . Согласно лемме 4 каждый узел  $i \in I$  можно соединить с  $i_1$  единственной цепью  $\{i_1, i_2, \dots, i_k, i\}$  дерева  $S_B = \{I, U_B\}$ . Рассматривая уравнения (3) вдоль (от  $i_1$  к  $i$ ) дуг этой цепи, определим потенциал  $u_i$  узла  $i$ . Например,

$$u_{i_2} = \begin{cases} u_{i_1} - c_{i_1 i_2}, & \text{если } (i_1, i_2) \text{ — прямая дуга,} \\ u_{i_1} + c_{i_1 i_2}, & \text{если } (i_1, i_2) \text{ — обратная дуга.} \end{cases}$$

Аналогично по  $u_{i_2}$  вычисляется  $u_{i_3}$  и т. д.

Имея потенциалы узлов, найдем оценки небазисных дуг:

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_H. \quad (4)$$

Поскольку на потоках  $x$  и  $\bar{x} = x + \Delta x$  выполняются условия баланса (1), то приращения  $\Delta x_{ij}$ ,  $(i, j) \in U$ , дуговых потоков удовлетворяют равенствам

$$\sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \Delta x_{ji} = 0, \quad i \in I. \quad (5)$$

Умножим обе части равенств (3), (4) на  $\Delta x_{ij}$  и просуммируем по  $(i, j) \in U$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} &= - \sum_{(i, j) \in U_H} \Delta_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{(i, j) \in U} (u_i - u_j) \Delta x_{ij} = \\ &= - \sum_{(i, j) \in U_H} \Delta_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{i \in I} u_i \left( \sum_{j \in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \Delta x_{ji} \right). \end{aligned}$$

С учетом (5) получим искомую формулу приращения стоимости потока:

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i, j) \in U_H} \Delta_{ij} \Delta x_{ij}. \quad (6)$$

Из (6) следует физический смысл оценок  $\Delta_{ij}$ :  $\Delta_{ij}$  — взятая с обратным знаком скорость изменения в точке  $x$  стоимости потока при увеличении небазисного дугового потока  $x_{ij}$ .

**4. Критерий оптимальности базисного потока.** Пусть  $x$  — базисный поток с базисным множеством дуг  $U_B$ ;  $\Delta_{ij}$ ,  $(i, j) \in U_H$ , — соответствующие ему оценки, вычисленные по формуле (4).

**Теорема 2 (критерий оптимальности).** Неравенства

$$\Delta_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in U_H, \quad (7)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности базисного потока  $x$ .

**Доказательство. Достаточность.** Поскольку  $x_{ij} = 0$ ,  $(i, j) \in U_H$ , и  $\bar{x}_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in U_H$ , для любого потока  $\bar{x} = x + \Delta x$ , то

$$\Delta x_{ij} = \bar{x}_{ij} - x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U_H. \quad (8)$$

Подставив (7), (8) в (6), убеждаемся, что  $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} \geq 0$ , т. е. стоимость потока  $x$  при любом его допустимом возмущении не убывает, что равносильно оптимальности  $x$ .

*Необходимость.* Пусть  $x$  — оптимальный невырожденный базисный поток, т. е.

$$x_{ij} > 0, (i, j) \in U_B. \quad (9)$$

Предположим, что неравенства (7) нарушаются при  $(i_0, j_0) \in U_H$  на оценке

$$\Delta_{i_0 j_0} > 0. \quad (10)$$

Построим специальное приращение  $\Delta x = \{\Delta x_{ij}, (i, j) \in U\}$ . Сначала положим

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} \Theta \geq 0, & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0), \\ 0, & \text{если } (i, j) \neq (i_0, j_0), (i, j) \in U_H. \end{cases} \quad (11)$$

Остальные компоненты  $\Delta x_{ij}, (i, j) \in U_B$ , найдем из уравнения (5), которые с учетом (11) принимают следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(U_B)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_B)} \Delta x_{ji} = \begin{cases} -\Theta, & \text{если } i = i_0, \\ +\Theta, & \text{если } i = j_0, \\ 0, & \text{если } i \neq i_0, j_0, i \in I. \end{cases} \quad (12)$$

Найдем решение  $\Delta x_{ij}, (i, j) \in U_B$ , системы (12), которая определена на дереве  $S_B = \{I, U_B\}$  и дуге  $(i_0, j_0)$ . Добавление дуги  $(i_0, j_0)$  к  $S_B$  приводит к появлению единственного цикла (лемма 5)  $\{i_0, j_0, i_1, \dots, i_k\}$ . Значение  $\Delta x_{ij}$  на дуге  $(i_0, j_0)$  задано (см. (11)):  $\Delta x_{i_0 j_0} = \Theta$ . Тогда для выполнения равенств (12) вдоль цикла необходимо и достаточно, чтобы 1)  $\Delta x_{ij} = \Theta$ , если  $\{i, j\}$  — ребро цикла и дуга  $(i, j)$  — прямая при обходе цикла в направлении  $i_0 \rightarrow j_0$ ; 2)  $\Delta x_{ij} = -\Theta$ , если рассматриваемая дуга  $(i, j)$  обратная. Положив  $\Delta x_{ij} \equiv 0$  для всех дуг  $(i, j) \in U_B$ , соответствующих ребрам, которые не входят в цикл, получим решение системы (12), которое представляет  $(i_0, j_0)$ -циркуляцию со значением  $\Theta$ .

Наложим построенную циркуляцию на базисный поток. Тогда согласно (11) дуговой поток  $x_{i_0 j_0} = 0$  увеличится до потока  $\bar{x}_{i_0 j_0} = x_{i_0 j_0} + \Delta x_{i_0 j_0} = \Theta \geq 0$ . Дуговые потоки  $x_{ij}, (i, j) \neq (i_0, j_0), (i, j) \in U_H$ , не изменятся. Изменятся на  $|\Delta x_{ij}|, |\Delta x_{ij}| \leq \Theta$ , дуговые потоки  $x_{ij}$  вдоль цикла. Поскольку цикл кроме  $\{i_0, j_0\}$  состоит из ребер базисных

дуг, то вдоль него выполняются неравенства (9) и достаточно малые возмущения  $\Delta x_{ij}$  не могут их нарушить:  $\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in U_B$ . Таким образом, вектор  $\bar{x} = x + \Delta x$  при достаточно малом  $\Theta > 0$  задает поток на сети  $S$ . Из формулы приращения (6) с учетом (10), (11) найдем, что стоимость потока  $\bar{x}$  меньше стоимости оптимального потока  $x$ :

$$\sum_{(i, j) \in U} c_{ij} \bar{x}_{ij} = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij} - \Theta \Delta_{i_0 j_0} < \sum_{(i, j) \in U} c_{ij} x_{ij}. \quad (13)$$

Противоречие доказывает теорему.

Проверка критерия оптимальности (7) сводится к следующим операциям: по описанным в п. 3 правилам вычисляем потенциалы узлов, по ним находим оценки небазисных дуг, которые проверяем на знак.

**5. Достаточное условие существования потока с неограниченной снизу стоимостью.** Предположим, что для рассматриваемого в п. 4 базисного потока выполняется неравенство (10) и все дуги, соответствующие ребрам цикла, являются прямыми при обходе последнего в направлении  $i_0 \rightarrow j_0$ . В этом случае, как видно из доказательства необходимости критерия оптимальности, все числа  $\Delta x_{ij}$  вдоль цикла окажутся положительными. Поэтому при наложении на  $x$  циркуляции с любым значением  $\Theta > 0$  получается поток  $\bar{x}$ . Из (13) следует, что с увеличением  $\Theta$  стоимость потока  $\bar{x}$  неограниченно убывает.

**Теорема 3.** При перечисленных в начале пункта условиях в задаче (2) существует поток со сколь угодно малой стоимостью (т. е. задача (2) не имеет решения).

**6. Итерация.** Продолжим анализ базисного потока из п. 4. Рассмотрим последний случай, когда наряду с отрицательной оценкой (10) в отличие от п. 5 вдоль цикла не все дуги прямые. Ясно, что в этом случае на поток  $x$  можно наложить  $(i_0, j_0)$ -циркуляцию только с конечным значением  $\Theta$ . Поскольку с увеличением  $\Theta$  стоимость нового потока уменьшается, то с точки зрения решения задачи (2) нужно найти максимально возможное значение  $\Theta^0$ . Из формулы

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} = x_{ij} - \Theta,$$

которая имеет место для обратных дуг, соответствующих ребрам цикла, следует, что

$$\Theta^0 = \Theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij}, \quad (14)$$

где минимум вычисляется по всем обратным дугам из цикла, построенного по небазисной дуге  $(i_0, j_0)$ .

Поток  $x$  заменим на поток  $\bar{x}$ , что согласно описанным действиям сведется к следующему: потоки на прямых дугах цикла (в том числе и на  $(i_0, j_0)$ ) увеличим на  $\Theta^0$ , потоки на обратных дугах уменьшим на  $\Theta^0$ , остальные дуговые потоки оставим без изменения. При этом стоимость потока согласно (13) уменьшится на величину  $\Theta^0 \Delta_{i_0 j_0}$ , которая, как следует из (10), (14), (9), для невырожденного потока  $x$  положительна, ибо  $\Theta^0 > 0$ .

Дугу  $(i_*, j_*)$  удалим из множества  $U_B$ , но добавим в него дугу  $(i_0, j_0)$ . Удаление дуги  $(i_*, j_*)$ , на которой  $x_{i_* j_*} = 0$ , разрушает единственный цикл в сети  $\{I, U_B \cup \{(i_0, j_0)\}\}$ . Следовательно, частичная сеть  $\bar{S}_B = \{I, \bar{U}_B\}$  с  $\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*) \cup (i_0, j_0))$  — дерево, а  $\bar{U}_B$  — базисное множество, соответствующее новому потоку  $\bar{x}$ , который, таким образом, оказался базисным потоком.

Переход  $x \rightarrow \bar{x}$  называется *итерацией метода потенциалов*, который, по определению, представляет совокупность последовательно проведенных итераций описанного типа для начального базисного потока.

Метод потенциалов для невырожденных сетевых транспортных задач (все базисные потоки которых не вырождены) конечен. Это следует из того, что в этом случае в процессе итераций базисные множества дуг вследствие строгого убывания стоимости потока не могут встретиться дважды, а их во всем множестве дуг лишь конечное число.

**З а м е ч а н и е.** Дуга  $(i_0, j_0)$  в описанной итерации выбиралась по произвольной положительной оценке (10). Часто ее выбирают из условия

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, (i, j) \in U_H.$$

**7. Первая фаза метода потенциалов.** Построение для задачи (2) начального базисного множества дуг  $U_B$  называется *первой фазой* метода потенциалов. Часто  $U_B$  просто строится методом проб. Общий метод состоит в следующем. К сети  $S = \{I, U\}$  добавляем *искусственный узел*  $n + 1$  с интенсивностью\*)  $a_{n+1} = \sum_{i \in I} a_i = 0$  и множество

---

\*) Из (2) следует, что равенство  $\sum_{i \in I} a_i = 0$  необходимо для существования потока в сети  $S$ .

$U_n$  из  $n$  искусственных дуг вида  $(i, n+1)$ , если  $i$  — источник или нейтральный узел;  $(n+1, i)$ , если  $i$  — сток.

В расширенной сети множество искусственных дуг является базисным (проверьте!) и потоки вдоль базисных (искусственных) дуг равны абсолютным значениям интенсивностей тех узлов  $i \in I$  исходной сети, которым эти дуги инцидентны.

**З а м е ч а н и е.** Если в конкретной задаче начальное базисное множество не удается сразу построить, то во многих случаях достаточно ввести не  $|I|$  искусственных дуг, а лишь их небольшое количество.

На расширенной сети методом потенциалов минимизируем сумму  $\sum_{(i, j) \in U_n} x_{ij}$  искусственных дуговых потоков (*задача первой фазы*). Следуя схеме § 1, проведем анализ решения  $\{x_{ij}^*, (i, j) \in U; x_{ij}^*, (i, j) \in U_n\}$  задачи первой фазы: 1) если  $x_{ij}^* \neq 0$ ,  $(i, j) \in U_n$ , то исходная сеть не допускает потока; 2) пусть  $x_{ij}^* \equiv 0$ ,  $(i, j) \in U_n$ , и базисное множество дуг  $U_B^*$  содержит единственную искусственную дугу. Удалив эту дугу из  $U_B^*$ , получим базисное множество исходной задачи и начальный базисный поток  $\{x_{ij}^*, (i, j) \in U_B\}$ . Процесс решения задачи (2) методом, изложенным в п. 6, начинающийся с построенного базисного потока, называется *второй фазой метода потенциалов*; 3) пусть  $x_{ij}^* = 0$ ,  $(i, j) \in U_n$ , и базисное множество  $U_B^*$  содержит более одной искусственной дуги. Тогда среди небазисных дуг  $(i, j) \in U \setminus U_B^*$  всегда найдется такая дуга  $(i_*, j_*)$ , что цикл, построенный из базисных дуг  $U_B^*$  и дуги  $(i_*, j_*)$ , содержит две искусственные дуги (предполагается, что сеть  $S = \{I, U\}$  — связная). Одну из этих искусственных дуг выведем из базисного множества и вместо нее введем дугу  $(i_*, j_*) \in U$ . Через конечное число шагов получим базисное множество, содержащее единственную искусственную дугу, т. е. придем к случаю 2).

Метод потенциалов решения задачи о потоке минимальной стоимости позволяет убедиться в следующем важном свойстве транспортных задач: если интенсивности узлов сети, допускающей поток, представляют целые числа и стоимости потоков ограничены снизу, то среди оптимальных потоков существует целочисленный поток (все его дуговые потоки равны целым числам).

Действительно, начальный базисный поток первой фазы (см. п. 7) будет целочисленным, а на каждой итерации целочисленный поток преобразуется опять в целочисленный.

**8. Пример.** Найдем оптимальный поток на сети из 6 узлов, изображенной на рис. 1.5. Узел 1 — источник, узел 6 — сток,  $|a_1| = |a_6| = 10$ . Остальные узлы нейтральные. Характеристики  $c_{ij}$  помещены над соответствующими дугами.

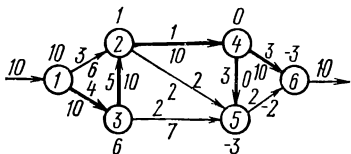


Рис. 1.5

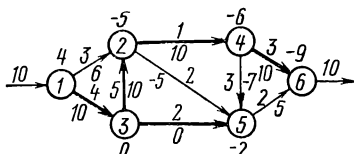


Рис. 1.6

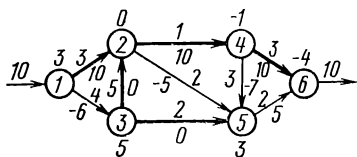


Рис. 1.7

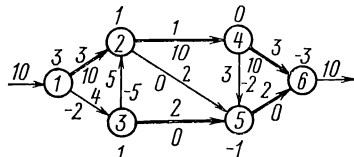


Рис. 1.8

Для рассматриваемой сети легко строится начальное базисное множество дуг, элементы которого на рис. 1.5 отмечены жирными линиями. Значения начальных базисных дуговых потоков помещены под дугами (небазисные дуговые потоки равны нулю и не отмечаются).

Решение задачи начнем с построения потенциалов узлов. Положим  $u_4 = 0$  (узлу 4 инцидентно наибольшее количество базисных дуг) и это число запишем около узла (рис. 1.5). Остальные потенциалы легко найдутся по формуле (3). Далее по формуле (4) вычислим оценки небазисных дуг и результаты поместим под дугами.

Максимальная из небазисных оценок равна  $\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{35} = 7$ . Дугу  $\{3, 5\}$  добавим к базисному множеству дуг, что приведет к циклу  $\{3, 5, 4, 2, 3\}$ . Минимальный дуговой поток на обратных дугах цикла равен  $\Theta^0 = x_{i_* j_*} = x_{45} = 0$ . Поскольку  $\Theta^0 = 0$ , то итерация сводится к замене базисной дуги  $(4, 5)$  на дугу  $(3, 5)$  (рис. 1.6). После подсчета потенциалов и оценок на новой сети найдем максимальную небазисную оценку  $\Delta_{12} = 6$ . Результаты дальнейших операций помещены на рис. 1.7. Поток на сети (рис. 1.8) удовлетворяет критерию оптимальности. По рис. 1.8 запишем компоненты потока минимальной стоимости:  $x_{12}^0 = 10$ ,  $x_{13}^0 = 0$ ,  $x_{32}^0 = 0$ ,  $x_{24}^0 = 10$ ,  $x_{25}^0 = 0$ ,  $x_{35}^0 = 0$ ,  $x_{45}^0 = 0$ ,  $x_{46}^0 = 10$ ,  $x_{56}^0 = 0$ .



**9. Матричная транспортная задача.** Рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости на *простой сети* (рис. I.9)  $S = \{I, U\}$ , в которой множество узлов  $I$  состоит из двух непересекающихся подмножеств  $I_1$  (источников),  $I_2$  (стоков) ( $I_1 \cup I_2 = I$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ), а множество дуг  $U$  — из всевозможных дуг вида  $(i, j)$ ,  $i \in I_1$ ,  $j \in I_2$ . При больших

Т а б л. I.11

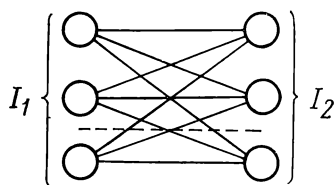


Рис. I.9

	$B_1$	$B_2$	$\dots$	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	$\dots$	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	$\dots$	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	$\dots$	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_n$	

$|I_1|$ ,  $|I_2|$  количество  $|I_1| \cdot |I_2|$  дуг сети становится большим, что затрудняет сетевые операции метода потенциалов при ручном счете. В этих условиях более удобна другая, *матричная (табличная)*, модель транспортных задач. Введем *транспортную  $m \times n$ -таблицу* (табл. I.11). Строку  $i \in I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$  припишем пункту производства  $A_i$ , столбец  $j \in I_2 = \{1, 2, \dots, n\}$  — пункту потребления  $B_j$ . Клетка  $(i, j)$  таблицы соответствует дороге из  $A_i$  в  $B_j$ . В верхнем правом углу клетки  $(i, j)$  поместим ее характеристику  $c_{ij} \geq 0$  — стоимость перевозки единицы продукта из  $A_i$  в  $B_j$ . Объем  $a_i \geq 0$  производства в  $A_i$  поместим справа от строки, объем  $b_j \geq 0$  потребления в  $B_j$  — снизу столбца. В нижнем левом углу каждой клетки поместим перевозки  $x_{ij}$ . Условие баланса в узлах  $I$  сведется к равенствам

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

которые получаются из элементов строки  $i$  и столбца  $j$  (соответственно) и выражают требование, чтобы весь

продукт из пунктов производства был вывезен, а запросы всех пунктов потребления были удовлетворены. Транспортные расходы на плане перевозок  $x = \{x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$  (совокупности чисел  $x_{ij}$  (перевозок), удовлетворяющих равенствам (15) и неравенствам

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

равны

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (17)$$

Задача минимизации функции (17) при ограничениях (15), (16) и есть *матричная транспортная задача*.

Цель настоящего параграфа — перенести сетевые операции метода потенциалов на транспортные таблицы. Но прежде докажем *критерий существования плана перевозок*.

**Теорема 3.** Для существования плана перевозок матричной транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие общего баланса*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (18)$$

т. е. чтобы общий объем производимого продукта равнялся общему объему потребления.

**Доказательство. Необходимость.** Если  $\{x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$  — план перевозок, то из (15) следует

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n b_j.$$

**Достаточность.** Пусть выполняется равенство (18).

Положим  $x_{ij} = a_i b_j / \alpha$ ,  $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ,  $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i =$

$= \sum_{j=1}^n b_j$ . Ясно, что на совокупности  $x = \{x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$  неравенства (16) выполняются. На  $x_{ij}$  выполняются и равенства (15):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \sum_{j=1}^n b_j / \alpha = a_i, i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \sum_{i=1}^m a_i / \alpha = b_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом,  $x$  — план перевозок. Теорема доказана.

Поскольку для любого плана перевозок  $x$  выполняются соотношения

$$0 \leq x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j < \infty, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n},$$

то множество планов перевозок компактно и условие общего баланса (18) становится *критерием существования оптимального плана перевозок*  $x^0$  — решения матричной транспортной задачи.

Перейдем к введению *базисного плана перевозок* и *базисного множества клеток*. Цепью (простой, элементарной), соединяющей клетку  $(i_1, j_1)$  с клеткой  $(i_k, j_k)$ , назовем последовательности различных клеток вида  $\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$  или  $\{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ , в которых каждые соседние две клетки лежат в одной строке или в одном столбце, но ни в одной строке и ни в одном столбце нет трех последовательных клеток. *Цикл* — это цепь, крайние клетки которой лежат в одной строке или одном столбце. Если в транспортной таблице соседние клетки цепи соединить прямыми линиями (*звеньями* цепи), то соседние звенья цепи всегда будут перпендикулярными.

Множество  $U_B \subset U$  клеток назовем *полным*, если  $|U_B| = n + m - 1$  и из его элементов невозможно составить ни одного цикла.

*Определение 6.* План перевозок  $x = \{x_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\}$  называется *базисным*, если все перевозки, кроме  $n + m - 1$  перевозки, равны нулю:

$$x_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U_H, \quad U_H = U \setminus U_B,$$

а остальные  $n + m - 1$  перевозки находятся в клетках, составляющих полное множество  $U_B$ .

Перевозки  $x_{ij}, (i, j) \in U_B$ , назовем *базисными*;  $x_{ij}, (i, j) \in U_H$ , — *небазисными*, множество  $U_B$  — *базисным множеством* клеток (соответствующим базисному плану перевозок  $x$ ).

*Определение 7.* Базисный план перевозок называется *невырожденным*, если  $x_{ij} > 0, (i, j) \in U_B$ .

Из п. 2 следуют свойства базисного множества клеток: 1) в каждой строке и каждом столбце найдется базисная клетка (клетка из  $U_B$ ); 2) существует строка или столбец, в которой лежит одна базисная клетка; 3) удаление базисной клетки, единственной в строке (столбце) вместе со строкой (столбцом), приводит к уменьшенной транспортной таблице, для которой уменьшенное базисное множество является базисным; 4) любую пару из строк и столбцов можно соединить единственной цепью из элементов базисного множества клеток  $U_B$ ; 5) добавление клетки к базисному множеству  $U_B$  создает единственный цикл; 6) если  $U_B$  — базисное множество клеток, то базисный поток восстанавливается следующим образом: а) полагаем  $x_{ij}=0$ ,  $(i, j) \in U_B$ ; б) отыскиваем базисную клетку  $(i_1, j_1)$ , единственную в строке  $i_1$  (столбце  $j_1$ ); в) полагаем  $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$  ( $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ ); г) объем  $b_{j_1}$  заменяем на  $b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$  ( $a_{i_1}$  на  $a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$ ) и строку  $i_1$  (столбец  $j_1$ ) исключаем из рассмотрения; д) с уменьшенной таблицей повторяем операции а) — г). Через  $n+m-1$  шаг будет построен базисный план перевозок, соответствующий базисному множеству  $U_B$ .

Для матричных транспортных задач существует несколько методов построения начальных базисных планов перевозок. Опишем два распространенных метода.

*Метод минимального элемента.* Среди элементов  $c_{ij}$ ,  $i=\overline{1, m}$ ;  $j=\overline{1, n}$ , найдем минимальный  $c_{i_1 j_1}$ . Положим  $x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$ . Если  $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$  ( $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ ), то исключаем из рассмотрения строку  $i_1$  (столбец  $j_1$ ), а число  $b_{j_1}(a_{i_1})$  заменяем на  $b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$  ( $a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$ ). С уменьшенной таблицей повторяем описанные операции. Через  $n+m-1$  шаг будет найдено  $n+m-1$  число  $x_{ij}$ . Если положить  $x_{ij} \equiv 0$  для остальных клеток, то из построения следует, что полученная совокупность  $\{x_{ij}, i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}\}$  составит план перевозок. Поскольку в каждой строке (в каждом столбце) окажется хотя бы одна клетка, для которой вычислялись числа  $x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots$ , то полученный план перевозок базисный.

*Метод северо-западного угла.* Для клетки  $(1,1)$ , лежащей в «северо-западном углу» транспортной таблицы, положим  $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ . Если  $x_{11} = a_1$  ( $x_{11} = b_1$ ), то строку 1 (столбец 1) исключаем из рассмотрения, а число  $b_1(a_1)$  заменяем на  $b_1 - x_{11}$  ( $a_1 - x_{11}$ ). В сокращенной таблице выбираем северо-западный угол и все операции повторяем. Через  $n+m-1$  шаг будут построены базис-

ные перевозки начального плана перевозок. Доказательство базисности проводится так же, как в предыдущем методе.

Перейдем к описанию метода потенциалов для решения матричной транспортной задачи, который представляет метод п. 4, сформулированный на языке транспортных таблиц. Пусть  $x$  — базисный план перевозок с базисным множеством клеток  $U_B$ . Некоторой (произвольной) строке  $i_1$  (столбцу  $j_1$ ) припишем число (*потенциал*)  $u_{i_1}$  ( $v_{j_1}$ ). По базисной клетке  $(i_1, j_1)$  из уравнения

$$u_{i_1} + v_{j_1} = c_{i_1 j_1},$$

к которому сводится уравнение (3), найдем  $v_{j_1}(u_{i_1})$ .

В силу указанного выше свойства 4) базисного множества *уравнения потенциалов*

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in U_B, \quad (19)$$

позволяют однозначно найти потенциалы всех строк и столбцов. Зная потенциалы  $u_i, v_j, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ , вычислим *оценки*  $\Delta_{ij}$  небазисных клеток по формуле

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_H, \quad (20)$$

которая является реализацией формулы (4).

Неравенства

$$\Delta_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in U_H, \quad (21)$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности базисного плана перевозок.

Если *критерий оптимальности* (21) не выполняется, то найдем такую клетку  $(i_0, j_0)$ , что

$$\Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, \quad (i, j) \in U_H. \quad (22)$$

Поскольку в матричной транспортной задаче целевая функция ограничена снизу на множестве планов перевозок, то этап проверки на неразрешимость задачи отпадает.

С помощью клетки  $(i_0, j_0)$  и клеток из  $U_B$  построим цикл (он единственный). Первым считаем горизонтальное звено из  $(i_0, j_0)$ . Среди перевозок, лежащих на концах горизонтальных звеньев (аналоги обратных дуг из п. 2), выбираем наименьшую:

$$\Theta^0 = \Theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij}. \quad (23)$$

Для невырожденного базисного плана перевозок всегда  $\Theta^0 > 0$ . К перевозкам  $x_{ij}$ , лежащим на концах вертикальных звеньев цикла (в том числе в клетку  $(i_0, j_0)$ ), добавляем  $\Theta^0$ , а из перевозок на концах горизонтальных звеньев цикла вычитаем  $\Theta^0$  (в клетке  $(i_*, j_*)$  перевозка исчезнет). Остальные перевозки не изменяем. Итерация завершается построением нового плана перевозок  $\bar{x}$  с базисным множеством клеток  $\bar{U}_B = (U_B \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0)$ . На итерации транспортные расходы сократятся на  $\Theta^0 \Delta_{i_0 j_0}$ .

Закончим параграф решением иллюстративного примера с данными из табл. I.12, в которой методом минимального элемента найден начальный базисный план перевозок (базисные перевозки для удобства вычислений заключены в кружок). Столбцу 5 (с наибольшим

Табл. I.12

	$B_1-4$	$B_2-1$	$B_3$	$B_4-2$	$B_5$	0	
$A_1$	5	1	3	2	4	5	50
	(15)		1	3	-1	(35)	
$A_2$	2	3	1	5	3	2	40
	-5	(25)		-3	-3	(15)	
$A_3$	1	4	2	1	5	1	60
	-7	-2	(36)		-6	(24)	
$A_4$	4	2	3	1	2	4	21
	-2			(10)	(11)		
	15	25	36	10	85		

Табл. I.13

	$B_1-1$	$B_2-1$	$B_3$	$B_4-2$	$B_5$	0	
$A_1$	2	1	3	2	4	5	50
	(15)		-2	(35)	-3		
$A_2$	2	3	1	5	3	2	40
	-2	(25)		-3	-1	(15)	
$A_3$	1	4	2	1	5	1	60
	-4	-2	(1)		-6	(59)	
$A_4$	4	2	3	1	2	4	21
	1			(10)	(11)		
	15	25	36	10	85		

Табл. I.14

	$B_1-4$	$B_2-1$	$B_3-3$	$B_4-2$	$B_5$	0	
$A_1$	5	1	3	2	4	5	50
	(15)		1	(35)	-1		
$A_2$	2	3	1	5	3	2	40
	-5	(25)		-6	-3	(15)	
$A_3$	1	4	2	1	5	1	60
	-7	-2		-3	-6	(60)	
$A_4$	4	2	3	1	2	4	21
	-2		(1)	(10)	(10)		
	15	25	36	10	85		

Табл. I.15

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	4	
$A_1$	0	1	3	2	4	5	50
	(15)	(10)	(25)	-1	-1		
$A_2$	-2	3	1	5	3	2	40
	-4	(15)		-5	-2	(25)	
$A_3$	-3	4	2	1	5	1	60
	-6	-2	-2	-5	(60)		
$A_4$	-1	2	3	1	2	4	21
	-2	-1	(11)	(10)	-1		
	15	25	36	10	85		

количеством базисных клеток) припишем нулевой потенциал  $v_5=0$  (он записан над столбцом чисел  $c_{i5}$ ). По базисной клетке (1,5) из уравнения (19) найдем потенциал строки 1:  $u_1=5$  (он записан в первой строке на уровне чисел  $c_{1j}$ ). Используя уравнения (19), находим потенциалы остальных строк и столбцов. Далее по формуле (20) подсчитаем оценки небазисных клеток и занесем их в правые нижние углы клеток. Максимальная оценка  $\Delta_{i_0 j_0} = \Delta_{13} = 3$  (см. (22))

положительна, т. е. начальный план перевозок не оптимален (нарушаются неравенства (21)). С помощью клетки (1, 3) и базисных клеток построим цикл  $\{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (3, 3), (1, 3)\}$ . Минимальная перевозка на концах горизонтальных звеньев цикла равна  $\Theta^0 = x_{i_* j_*} = x_{15} = 35$  (см. (23)). Число 35 добавим к перевозкам в клетках (1, 3), (3, 5) и вычтем из перевозок в клетках (1, 5), (3, 3). Остальные перевозки не изменяем. Клетку (1, 5) удалим из базисного множества, а клетку (1, 3) добавим. Новая итерация начинается с табл. I. 13. Результаты следующих итераций помещены в табл. I. 14, I. 15. Табл. I. 15 удовлетворяет критерию оптимальности (21). Числа  $x_{11}^0 = 15$ ,  $x_{12}^0 = 10$ ,  $x_{13}^0 = 25$ ,  $x_{22}^0 = 15$ ,  $x_{25}^0 = 25$ ,  $x_{35}^0 = 60$ ,  $x_{43}^0 = 11$ ,  $x_{44}^0 = 10$ ,  $x_{14}^0 = x_{21}^0 = x_{23}^0 = x_{24}^0 = x_{31}^0 = x_{32}^0 = x_{33}^0 = x_{34}^0 = x_{41}^0 = x_{42}^0 = x_{45}^0 = 0$ , выписанные из табл. I. 15, составляют оптимальный план перевозок в рассматриваемой задаче.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования.— М.: Наука, 1977.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования, ч. I—III.— Минск: Изд-во БГУ, 1977, 1978, 1980.
3. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения.— М.: Прогресс, 1966.
4. Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1977.
5. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М.: Физматгиз, 1963.

## Глава II. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Выпуклым программированием* называется раздел математики, в котором исследуются задачи минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (1)$$

*выпуклых функций*  $f(x)$  на *выпуклых множествах*  $X$  конечномерного пространства  $R_n$ . Выпуклое программирование является непосредственным обобщением линейного программирования (гл. I) и при своем становлении и развитии испытало сильное влияние идей и методов последнего. Исследование задач выпуклого программирования привело к созданию *выпуклого анализа*, в котором детально изучаются свойства выпуклых функций и множеств.

При формулировке основной задачи выпуклого про-

граммирования (1) принято множество  $X$  задавать в форме  $X = \{x: g(x) \leq 0, x \in Q\}$ , где  $Q$  и компоненты  $m$ -вектор-функции  $g(x)$  — выпуклые множество и функции.

## § 1. Выпуклые множества и функции

Выпуклые множества и выпуклые функции играют большую роль в современной теории экстремальных задач. Они изучаются в выпуклом анализе, начальные сведения из которого приводятся в данном параграфе.

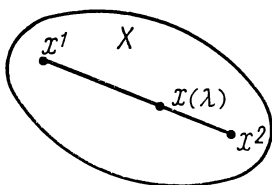


Рис. II.1

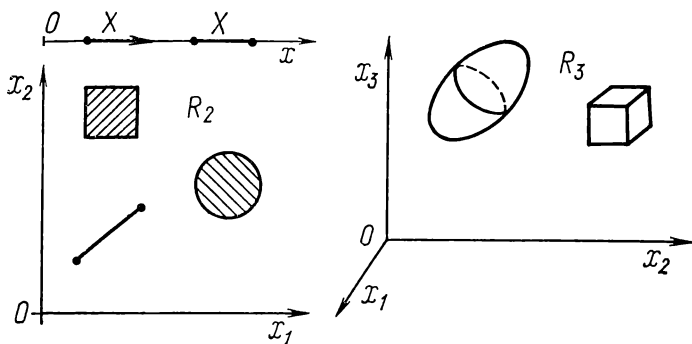


Рис. II.2

**1. Определения.** Множество  $X$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$  называется *выпуклым*, если наряду с любыми двумя своими точками содержит и весь отрезок, соединяющий их (рис. II.1). Другими словами, если  $x^1, x^2 \in X$ , то  $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$  при всех  $\lambda \in [0, 1]$ .

Примерами выпуклых множеств являются пространство  $R_n$  и множества на рис. II.2. Рис. II.3 содержит примеры невыпуклых множеств.

*Функция  $f(x)$* , определенная и конечная на выпуклом множестве  $X$ , называется *выпуклой*, если для любых





Рис. II.3

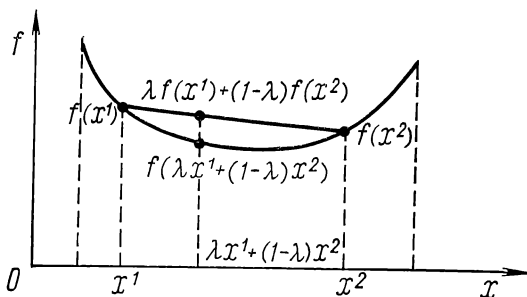


Рис. II.4

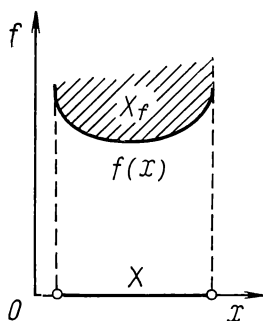


Рис. II.5

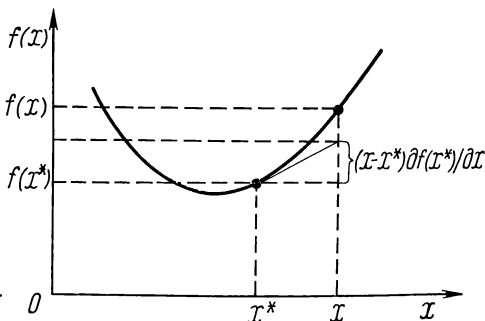


Рис. II.6

$x^1, x^2 \in X$  и при всех  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется неравенство (рис. II.4)

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2).$$

К примеру, негладкая функция  $f(x) = |x|$ ,  $x \in R_1$ , — выпуклая, ибо  $|\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2| \leq \lambda |x^1| + (1-\lambda)|x^2|$  при любых  $x^1, x^2 \in R_1$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

В качестве определения выпуклой функции можно взять следующий критерий: для выпуклости функции

$f(x)$  на выпуклом множестве  $X$  необходимо и достаточно, чтобы ее надграфик (рис. II.5)

$$X_f = \{ \{x, y\} : x \in X, y \geq f(x) \}$$

был выпуклым множеством.

Скалярное определение: функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , выпукла тогда и только тогда, когда при любых  $x$ ,  $l \in R_n$  выпукла функция  $\varphi(t) = f(x + lt)$  скалярного аргумента  $t \in R_1$ .

Для гладких функций  $f(x) \in C^{(1)}$  используется такой критерий: функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , выпукла в том и только том случае, если при всех  $x$ ,  $x^* \in R_n$  выполняется неравенство (рис. II.6)

$$f(x) - f(x^*) \geq (x - x^*)' \partial f(x^*) / \partial x.$$

Если функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , дважды непрерывно дифференцируема:  $f(x) \in C^{(2)}$ , то она выпукла тогда и только тогда, когда матрица  $\partial^2 f(x) / \partial x^2 \geq 0$ ,  $x \in R_n$ , ее вторых производных неотрицательна.

Напомним, симметричная  $n \times n$ -матрица  $A = \{a_{ij}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}\}$  называется *неотрицательной* (положительной) и обозначается символом  $A \geq 0$  ( $A > 0$ ), если знако (определенно) положительна квадратичная форма

$$x' A x, \text{ т. е. } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0 \text{ при всех } x = \{x_1, \dots, x_n\} \in R_n \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0, x \neq 0 \right).$$

*Сильвестра*: 1) для положительности матрицы  $A$  необходимо и достаточно, чтобы все ее последовательные главные миноры  $D_s$  были положительными:  $D_s = \det \{a_{ij}, i = \overline{1, s}; j = \overline{1, s}\} > 0$ ,  $s = \overline{1, n}$ ; 2) для неотрицательности матрицы  $A$  необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательными:  $\det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_s \\ j_1, \dots, j_s \end{pmatrix} \geq 0$ ,

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$ ;  $s = \overline{1, n}$ . Здесь символом  $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_s \\ j_1, \dots, j_s \end{pmatrix}$  обозначена  $s \times s$ -матрица, составленная из строк с номерами  $i_1, \dots, i_s$  и столбцов с номерами  $j_1, \dots, j_s$  матрицы  $A$ .

**2. Свойства выпуклых множеств.** Пересечение любого числа выпуклых множеств — выпуклое множество.

*Выпуклая комбинация*  $\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right)$

любых элементов  $x^i, i = \overline{1, k}$ , выпуклого множества принадлежит этому множеству.

Пусть  $X, Y$  — выпуклые множества, одно из которых ограничено. Если их замыкания  $\bar{X}, \bar{Y}$  не пересекаются, то они *строго отделимы* (рис. II.7), т. е. при некоторых

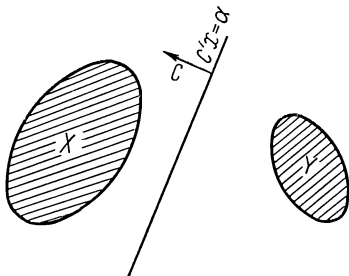


Рис. II.7

$n$ -векторе  $c' \neq 0$  и числе  $\alpha$  для всех  $x \in X, y \in Y$  выполняются неравенства  $c'x < \alpha < c'y$  (теорема о строгой отделимости;  $c'x = \alpha$  — *разделяющая гиперплоскость*).

Непересекающиеся выпуклые множества  $X, Y$  *отделимы*, т. е. существует такой вектор  $c' \neq 0$ , что  $c'x \leq c'y$  при всех  $x \in X, y \in Y$  (теорема об отделимости).

Если  $x^*$  — граничная точка выпуклого множества  $X$ , то в этой точке существует *опорная плоскость* к  $X$ , т. е. при некотором  $c' \neq 0$  для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $c'x \leq c'x^*$  (теорема о существовании опорной плоскости).

**3. Свойства выпуклых функций.** Множество уровня  $\{x: f(x) \leq c\}$  выпуклой функции  $f(x), x \in R_n$ , или пусто, или выпукло.

Если  $f_i(x), x \in R_n, i = \overline{1, k}$ , — выпуклые функции, то и  $f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x), \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, k}$ ; и  $f(x) = \max_{i=1, \dots, k} f_i(x), i = \overline{1, k}$ , — выпуклые функции.

Выпуклая функция  $f(x), x \in R_n$ , непрерывна в каждой точке  $x$ .

В каждой точке  $x \in R_n$  выпуклая функция  $f(x)$  имеет производную по любому направлению  $l \in R_n$ :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + lt) - f(x)}{t}.$$

Например,  $\partial |x| / \partial l|_{x=0} = |l|$ ,  $\partial |x| / \partial l|_{x>0} = l$ ,  $\partial |x| / \partial l|_{x<0} = -l$ .

Вектор  $c \in R_n$  называется *субградиентом* выпуклой функции  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , в точке  $x^*$ , если для всех  $x \in R_n$  выполняется неравенство

$$f(x) - f(x^*) \geq c'(x - x^*).$$

Множество субградиентов в точке  $x^*$  называется *субдифференциалом*  $\partial f(x^*)$ . В каждой точке субдифференциал представляет собой непустой выпуклый компакт, который состоит из единственного элемента  $\partial f(x)/\partial x$ , если функция  $f(x)$  дифференцируема в  $x$ . Например,

$$\partial |x| = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ [-1, 1], & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Справедлива формула

$$\partial f(x^*) / \partial l = \max c'l, \quad c \in \partial f(x^*).$$

Функцию  $f(x)$  называют *вогнутой*, если функция  $-f(x)$  выпуклая.

Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на выпуклых компактных множествах  $x \in X \subset R_n$ ,  $y \in Y \subset R_m$ . Если функция  $f(x, y)$  при каждом  $y \in Y$  выпукла по  $x \in X$ , а при каждом  $x \in X$  вогнута по  $y \in Y$ , то она имеет седловую точку  $\{x^0, y^0\}$ ,  $x^0 \in X$ ,  $y^0 \in Y$ :

$$f(x^0, y) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x, y^0)$$

и для нее справедлива *теорема о минимаксе*:

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

**4. Выпуклые оболочки множеств и функций.** *Выпуклой оболочкой* множества  $X \subset R_n$  называется множество\*) (рис. II.8)

$$\text{conv } X = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

\*) Если  $X$  — связное множество, то вместо  $n+1$  берут  $n$ .

Множество  $\text{conv } X$  совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих множество  $X$ .

Выпуклой оболочкой  $\text{conv } f(x)$  функции  $f(x)$ ,  $x \in X$ , называется функция (рис. II.9)

$$\text{conv } f(x) = \inf \{y \in R_1: \{x, y\} \in \text{conv } X_f\}.$$

Выпуклые оболочки множеств и функций выпуклы.

**5. Усиленная выпуклость.** Множество  $X \subset R_n$  называют строго выпуклым, если при любых  $x^1, x^2 \in X$ ,  $x^1 \neq x^2$ ,

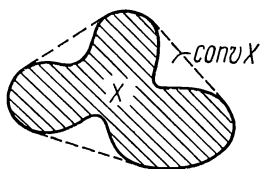


Рис. II.8

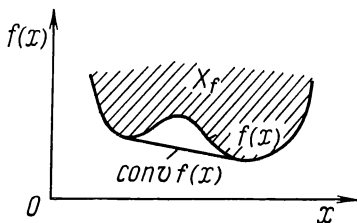


Рис. II.9

$\lambda \in ]0, 1[$  точка  $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$  — (относительно) внутренняя точка  $X(x(\lambda) \in \text{int } X)$ . К примеру, круг — строго выпуклое множество, квадрат — нет.

Функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , называется строго выпуклой, если для любых  $x^1, x^2 \in R_n$ ,  $x^1 \neq x^2$ ,  $\lambda \in ]0, 1[$  выполняется строгое неравенство  $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$ . Например, функция  $c'x$ ,  $x \in R_n$ , — выпуклая, но не строго выпуклая.

Гладкая функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , строго выпукла тогда и только тогда, когда при любых  $x, x^* \in R_n$ ,  $x \neq x^*$ , выполняется неравенство

$$f(x) - f(x^*) > (x - x^*)' \partial f(x^*) / \partial x.$$

Если  $f(x) \in C^{(2)}$ ,  $x \in R_n$ , то неравенство  $\partial^2 f(x) / \partial x^2 > 0$ ,  $x \in R_n$ , — достаточное условие строгой выпуклости  $f(x)$ .

Множество уровня строго выпуклой функции или пусто, или строго выпукло.

Функцию  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , называют сильно выпуклой, если для любых  $x^1, x^2 \in R_n$ ,  $x^1 \neq x^2$ , и некоторого  $\mu > 0$  выполняется неравенство  $f(x^1/2 + x^2/2) < f(x^1)/2 + f(x^2)/2 - \mu \|x^1 - x^2\|$ .

Функция  $f(x) \in C^{(2)}$ ,  $x \in R_n$ , сильно выпукла в том и только том случае, если для всех  $x, l \in R_n$  и при некотором  $v > 0$  выполняется неравенство  $l'[\partial^2 f(x)/\partial x^2]l \geq v \|l\|^2$ . К примеру, функция  $f(x) = x^4$  строго выпукла, но не сильно выпукла, ибо  $\partial^2 f(0)/\partial x^2 = 0$ . Квадратичная форма  $x'Ax$  и строго, и сильно выпукла при  $A > 0$ .

## § 2. Теорема Куна — Таккера

Теоремой Куна — Таккера в выпуклом программировании называют основной результат — критерий оптимальности, сформулированный в терминах седловой точки функции Лагранжа.

**1. Седловая точка функции Лагранжа и решение основной задачи выпуклого программирования.** Основной в выпуклом программировании принято считать задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q, \quad (1)$$

в которой  $Q$  — выпуклое множество,  $f(x)$  и компоненты  $g_1(x), \dots, g_m(x)$   $m$ -вектор-функции  $g(x)$  — выпуклые функции.

Каждый  $n$ -вектор  $x$ , удовлетворяющий ограничениям задачи (1), называют, следуя линейному программированию, *планом* (допустимыми точкой, вектором, решением). Решение  $x^0$  задачи (1)

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q,$$

есть *оптимальный план*.

Из свойств выпуклых множеств и функций (§ 1) следует, что как множество планов

$$X = \{x: g(x) \leq 0, x \in Q\},$$

так и множество оптимальных планов

$$X^0 = \{x: f(x) \leq f(x^0), x \in X\}$$

являются выпуклыми, ибо они — пересечения выпуклых множеств  $Q, \{x: g_i(x) \leq 0\}, i = \overline{1, m}$  (в случае  $X$ ), и множеств  $X, \{x: f(x) \leq f(x^0)\}$  (в случае  $X^0$ ).

Таким образом, если в задаче (1) имеется два оптимальных плана, то оптимальными будут все планы (их континуум), лежащие на отрезке между указанными планами,

Если целевая функция  $f(x)$  — строго выпуклая, то оптимальный план задачи (1) единственный. Действительно, если  $x^*$  — другой оптимальный план ( $f(x^0) = f(x^*)$ ), то при  $\mu \in ]0, 1[$  получим противоречие:  $f(x^0) \leq f(\mu x^0 + (1-\mu)x^*) < \mu f(x^0) + (1-\mu)f(x^*) = f(x^0)$ .

По элементам  $f(x)$ ,  $g(x)$  задачи (1) составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda' g(x) \quad (2)$$

и рассмотрим ее при  $x \in Q$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda \in R_m$ .

**Определение 1.** Говорят, что  $\{x^*, \lambda^*\}$ ,  $\lambda^* \geq 0$ ,  $x^* \in Q$ , — седловая точка функции Лагранжа (2), если для всех  $x \in Q$ ,  $\lambda \geq 0$  выполняются неравенства

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Если  $\{x^*, \lambda^*\}$ ,  $x^* \in Q$ ,  $\lambda^* \geq 0$ , — седловая точка функции Лагранжа (2), то  $x^*$  — оптимальный план задачи (1) и выполняется условие дополняющей нежесткости

$$g'(x^*)\lambda^* = 0. \quad (4)$$

**Доказательство.** Запишем неравенства (3) в исходных функциях:

$$f(x^*) + \lambda' g(x^*) \leq f(x^*) + g'(x^*)\lambda^* \leq f(x) + g'(x)\lambda^*, \\ x \in Q, \lambda \geq 0. \quad (5)$$

Из левого неравенства в (5) следует

$$\lambda' g(x^*) \leq g'(x^*)\lambda^*. \quad (6)$$

Для выполнения (6) необходимо, чтобы  $\underline{g(x^*)} \leq 0$ , ибо если  $g_i(x^*) > 0$  при некотором  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то, полагая  $\lambda_j = 0$ ,  $j \neq i$ ,  $j = \overline{1, m}$ , и выбирая  $\lambda_i$  достаточно большим, получаем слева в (6) сколь угодно большое положительное число. Таким образом,  $x^*$  — план задачи (1).

Из (6) следует условие дополняющей нежесткости (4). Действительно, если допустить, что  $g'(x^*)\lambda^* = \alpha < 0$ , то, положив  $\lambda = \lambda^*/2$ , в (6) получим противоречие  $\alpha/2 \leq \leq \alpha < 0$ .

С учетом (4) правое неравенство в (5) переходит в неравенство  $f(x^*) \leq f(x) + g'(x)\lambda^*$ , из которого в силу  $\lambda^* \geq 0$  следует, что для всех  $x \in Q$ , удовлетворяющих неравенству  $g(x) \leq 0$ , выполняется неравенство  $f(x^*) \leq f(x)$ .

Таким образом,  $x^*$  — оптимальный план задачи (1) и теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** При доказательстве теоремы выпуклость множества  $Q$  и функций  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i=\overline{1, m}$ , не использовалась. Таким образом, теорема 1 верна для произвольных  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $Q$ .

Согласно теореме 1 для построения оптимального плана задачи (1) достаточно найти седловую точку функции Лагранжа (2). Однако не для каждой задачи (1) функция Лагранжа имеет седловую точку. Например, для оптимального плана  $x^0=0$  задачи  $x \rightarrow \min, x^2 \leq 0, x \in R_1$ , невозможно подобрать такое число  $\lambda^0 \geq 0$ , чтобы пара  $\{0, \lambda^0\}$  была седловой точкой функции Лагранжа  $F(x, \lambda) = x + \lambda x^2$ , ибо в силу  $\partial F(0, \lambda)/\partial x = 1$  нельзя добиться выполнения равенства  $\partial F(0, \lambda^0)/\partial x = 0$ , которое должно выполняться в седловой точке.

Первые результаты, эквивалентные теореме существования седловых точек функции Лагранжа, для гладких задач были получены Г. В. Куном и А. В. Таккером.

**2. Гладкие задачи.** Рассмотрим *гладкую задачу* выпуклого программирования, под которой понимается задача (1) с гладкими выпуклыми функциями  $f(x)$ ,  $g(x)$  и множеством  $Q$  вида

$$Q = \{x: x \geq 0\}.$$

**Определение.** Говорят, что множество планов (ограничения) основной задачи выпуклого программирования *регулярно* (удовлетворяет *условию Слейтера*), если на некотором плане  $x^*$  выполняется неравенство

$$g(x^*) < 0. \quad (7)$$

Пусть  $I_0(x^0) = \{i: g_i(x^0) = 0\}$  — множество индексов ограничений, активных на плане  $x^0$ ,  $J_0(x^0) = \{j: x_j^0 = 0\}$ ,  $J_+(x^0) = \{j: x_j^0 > 0\}$  — множества индексов нулевых и положительных компонент плана  $x^0$ .

**Лемма 1.** Предположим, что множество  $X$  планов гладкой задачи (1) регулярно. Тогда для любых планов  $x^*$ ,  $x^0 \in X$ ,  $x^0 \neq x^*$ , и любого вектора  $l_* \in R_n$ , удовлетворяющих (7) и системе

$$l' \partial g_i(x^0) / \partial x \leq 0, i \in I_0(x^0); l_j \geq 0, j \in J_0(x^0), \quad (8)$$

найдутся такие числа  $\alpha_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$ , что при всех  $\alpha \in [0, \alpha_0]$ ,  $t \in [0, t_0]$  вектор



$$x(t) = x^0 + l_* t + \alpha(x^* - x^0)t \quad (9)$$

является планом задачи (1).

**Доказательство.** Покажем, что на векторе (9) с достаточно малыми параметрами  $\alpha$ ,  $t$  выполняется каждое ограничение задачи (1). Если  $x_j^0 > 0$ , то из (9) видно, что  $x_j(t) > 0$  при малых  $t > 0$ . Пусть  $x_j^0 = 0$ ,  $l_{*j} > 0$ . Тогда  $x_j(t) = l_{*j}t + \alpha x_j^* t > 0$ , если  $t > 0$  и число  $\alpha > 0$  достаточно мало. Предположим, что  $x_j^0 = 0$ ,  $l_{*j} = 0$ . В этом случае  $x_j(t) = \alpha x_j^* t \geq 0$  при  $\alpha \geq 0$ . Таким образом,  $x(t) \in Q$ ,  $t \in [0, t_0]$ .

Пусть  $g_i(x^0) < 0$ . Тогда из разложения

$$\begin{aligned} g_i(x(t)) &= \\ &= g_i(x^0) + t(l_* + \alpha(x^* - x^0))' \partial g_i(x^0) / \partial x + o(t) \end{aligned} \quad (10)$$

следует неравенство  $g_i(x(t)) < 0$ , если число  $t$  достаточно мало.

Допустим, что  $g_i(x^0) = 0$ ,  $l_*' \partial g_i(x^0) / \partial x < 0$ . Из (10) видно, что при достаточно малом  $\alpha$  выполняется неравенство  $g_i(x(t)) < 0$ ,  $t \in [0, t_0]$ . Наконец, пусть  $g_i(x^0) = 0$ ,  $l_*' \partial g_i(x^0) / \partial x = 0$ . Из определения гладкой выпуклой функции

$$g_i(x^*) - g_i(x^0) \geq (x^* - x^0)' \partial g_i(x^0) / \partial x$$

и неравенства (7) следует неравенство  $(x^* - x^0)' \times \times \partial g_i(x^0) / \partial x < 0$ . Используя последнее неравенство, из разложения (10) получим неравенство  $g_i(x(t)) \leq 0$ ,  $t \in [0, t_0]$ . Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $x^0$  — оптимальный план гладкой задачи (1) с регулярным множеством планов. Тогда для каждого вектора  $l$ , удовлетворяющего системе (8), выполняется неравенство

$$l' \partial f(x^0) / \partial x \geq 0. \quad (11)$$

**Доказательство.** Предположим, что вектор  $l_*$  удовлетворяет системе (8), но

$$l_*' \partial f(x^0) / \partial x < 0. \quad (12)$$

Согласно лемме 1 функция (9),  $t \in [0, t_0]$ ,  $t_0 > 0$ , удовлетворяет ограничениям задачи (1). При достаточно малых  $\alpha > 0$  в силу (12) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} df(x(t))/dt|_{t=0} &= [\partial f(x(t))/\partial x]' dx/dt|_{t=0} = \\ &= (l_* + \alpha(x^* - x^0))' \partial f(x^0)/\partial x < 0, \end{aligned}$$

из которого для достаточно малых  $t > 0$  следует неравенство  $f(x(t)) < f(x^0)$ , противоречащее оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

Теорема 2 содержит прямое необходимое условие оптимальности в том смысле, что позволяет в случае неоптимальности плана  $x^0$  «улучшить» его, т. е. построить такой план  $\bar{x}$ , что  $f(\bar{x}) < f(x^0)$ . Проверка условий теоремы 2 сводится к решению задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} l' \partial f(x^0)/\partial x \rightarrow \min_i, \quad l' \partial g_i(x^0)/\partial x \leq 0, \quad i \in I_0(x^0); \quad l_j \geq 0, \\ j \in J_0(x^0), \end{aligned}$$

с каким-нибудь нормировочным условием (например,  $\alpha_j \leq l_j \leq \beta_j$ ,  $j \in J_+(x^0)$ ) для исключения неограниченных решений  $l_*$ . Если  $l'_* \partial f(x^0)/\partial x < 0$ , то по формуле (9) строится новый план  $\bar{x} = x(t)$ ,  $f(\bar{x}) < f(x^0)$ .

Применив к теореме 2 теорему Фаркаша (гл. I, § 2), получим двойственное необходимое условие оптимальности.

**Теорема 3.** Для оптимальности плана  $x^0$  в гладкой задаче (1) с регулярным множеством планов необходимо существование таких неотрицательных  $m$ -вектора  $\lambda^0 \geq 0$  и  $n$ -вектора  $\mu^0 \geq 0$ , что выполняются условия:

1) стационарности

$$\partial f(x^0)/\partial x + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \partial g_i(x^0)/\partial x = \mu^0; \quad (13)$$

2) дополняющей нежесткости

$$g'(x^0) \lambda^0 = 0, \quad x^{0'} \mu^0 = 0. \quad (14)$$

В терминах функции Лагранжа (2) равенство (13) имеет вид

$$\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = \mu^0. \quad (15)$$

Из свойств выпуклых функций следует, что при  $\lambda \geq 0$  функция Лагранжа выпукла по  $x$ , т. е.  $F(x, \lambda^0) - F(x^0, \lambda^0) \geq (x - x^0)' \partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x$ . Отсюда с учетом (14),

(15) получаем неравенство  $F(x, \lambda^0) \geq F(x^0, \lambda^0) + x' \mu^0$ , т. е. при всех  $x \geq 0$  выполняется неравенство

$$F(x^0, \lambda^0) \leq F(x, \lambda^0). \quad (16)$$

С другой стороны, поскольку неравенство  $\lambda' g(x^0) \leq 0$  выполняется для всех  $\lambda \geq 0$ , а согласно (14) выполняется равенство  $g'(x^0) \lambda^0 = 0$ , то для всех  $\lambda \geq 0$  получаем неравенство

$$\begin{aligned} F(x^0, \lambda) &= f(x^0) + \lambda' g(x^0) \leq f(x^0) + g'(x^0) \lambda^0 = \\ &= F(x^0, \lambda^0). \end{aligned} \quad (17)$$

Неравенства (16), (17) означают, что  $\{x^0, \lambda^0\}$  — седловая точка функции Лагранжа. Это утверждение для полноты формулировки окончательного результата объединим с теоремой 1.

**Теорема 4 (Куна — Таккера).** Для существования оптимального плана  $x^0$  основной задачи выпуклого программирования с регулярным множеством планов необходимо и достаточно существование такого неотрицательного вектора  $\lambda^0 \geq 0$ , что пара  $\{x^0, \lambda^0\}$  — седловая точка функции Лагранжа. При этом выполняется условие дополняющей нежесткости

$$g'(x^0) \lambda^0 = 0. \quad (18)$$

**З а м е ч а н и е.** Вектор  $\lambda^0$  называется *вектором Лагранжа*, соответствующим оптимальному плану  $x^0$ .

Теорема 4 (в необходимой части) доказана выше для гладкой задачи выпуклого программирования, но она верна и в сформулированном виде. Доказательство для общего случая приводится в п. 3.

**3. Общий случай.** В формулировке теоремы 4 не используются производные от элементов  $f(x)$ ,  $g(x)$  и предположение о специальном виде множества  $Q$ . Покажем, что от них можно избавиться и при доказательстве теоремы, если воспользоваться техникой выпуклого анализа.

В  $(m+1)$ -мерном пространстве построим множества  $A = \{\bar{y} = \{y_0, y\}: y_0 \geq f(x), y \geq g(x) \text{ при некотором } x \in Q\}$ ,

$B = \{\bar{y} = \{y_0, y\}: y_0 = f(x), y = g(x), x \in Q\}$ ,

$C = \{\bar{z} = \{z_0, z\}: z_0 < f(x^0), z < 0\}$ .

Множества  $A$  и  $C$  выпуклы. Действительно, пусть  $\{\tilde{y}_0, \tilde{y}\} \in A$  и  $\{\check{y}_0, \check{y}\} \in A$ . Тогда, по определению множества  $A$ , найдутся векторы  $\tilde{x} \in Q$  и  $\check{x} \in Q$  такие, что

$$\tilde{y}_0 \geq f(\tilde{x}), \quad \tilde{y} \geq g(\tilde{x}), \quad (19)$$

$$\check{y}_0 \geq f(\check{x}), \quad \check{y} \geq g(\check{x}). \quad (20)$$

Построим точку  $\{\lambda\tilde{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0, \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\check{y}\}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Для компонент этой точки в силу (19), (20) и выпуклости функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \lambda\tilde{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0 &\geq \lambda f(\tilde{x}) + (1-\lambda)f(\check{x}) \geq f(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\check{x}), \\ \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\check{y} &\geq \lambda g(\tilde{x}) + (1-\lambda)g(\check{x}) \geq g(\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\check{x}). \end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\check{x} \in Q$ , то полученные неравенства означают, что  $\{\lambda\tilde{y}_0 + (1-\lambda)\check{y}_0, \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\check{y}\} \in A$ , т. е.  $A$  — выпуклое множество. Множество  $C$  выпукло как пересечение полупространств.

Множества  $A$  и  $C$  не имеют общих точек. Действительно, если  $\bar{y} = \bar{z}$ ,  $\bar{y} \in A$  и  $\bar{z} \in C$ , то при некотором  $\tilde{x} \in Q$  будут выполняться неравенства  $f(\tilde{x}) \leq y_0 = z_0 < f(x^0)$ ,  $g(\tilde{x}) \leq y = z < 0$ , которые противоречат оптимальности плана  $x^0$ .

Множества  $A$  и  $C$  по свойству выпуклых множеств можно отделить, т. е. найдется такой  $(m+1)$ -вектор  $\bar{c} = \{c_0, c\}$ ,  $\|\bar{c}\| = 1$ , что для всех  $\bar{y} \in A$ ,  $\bar{z} \in C$  выполняется неравенство

$$\bar{c}'\bar{y} \geq \bar{c}'\bar{z}. \quad (21)$$

Из (21) и определения множества  $C$  следует, что вектор  $\bar{c}$  неотрицателен:  $\bar{c} \geq 0$ . Если допустить, что существует отрицательная компонента  $\bar{c}_i < 0$ , то для вектора  $\bar{z} = \{f(x_0) + \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \beta^2\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon\}$  с элементом  $\beta^2\varepsilon$  на  $i$ -м месте при фиксированном  $\varepsilon < 0$  и достаточно большом  $\beta$  получим величину  $\bar{c}'\bar{z}$ , сколь угодно большую, что противоречит неравенству (21).

Множество  $B$  принадлежит множеству  $A$ , поэтому неравенство (21) выполняется и при  $\bar{y} \in B$ , т. е.

$$c_0 f(x) + c'g(x) \geq \bar{c}'\bar{z} \quad \text{для всех } x \in Q. \quad (22)$$

Неравенство (22) справедливо для всех точек множества  $C$ . Оно будет выполняться и для предельных точек множества  $C$ , в частности для точки  $\{f(x^0), 0\}$ :

$$c_0 f(x) + c' g(x) \geq c_0 f(x^0) \text{ при всех } x \in Q. \quad (23)$$

Докажем, что  $c_0 > 0$ . Если  $c_0 = 0$ , то из  $\bar{c} \geq 0$ ,  $\bar{c} \neq 0$ , следует, что  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ . Неравенство (23) принимает вид  $c' g(x) \geq 0$  для всех  $x \in Q$ .

С другой стороны, из (7) следует неравенство  $c' g(x^*) < 0$ . Противоречие доказывает, что  $c_0 > 0$ . Чтобы доказать (18), положим  $\lambda^0 = c/c_0$ . Поскольку  $c_0 > 0$ , то из (23) следует

$$f(x) + g'(x) \lambda^0 \geq f(x^0) \text{ для всех } x \in Q. \quad (24)$$

Отсюда при  $x = x^0$  получаем неравенство  $g'(x^0) \lambda^0 \geq 0$ . Но, с другой стороны, из  $\lambda^0 \geq 0$ ,  $g(x^0) \leq 0$  следует  $[\lambda^0]' g(x^0) \leq 0$ . Таким образом, равенство (18) доказано.

Неравенство (24) с учетом (18) принимает вид

$$f(x^0) + g'(x^0) \lambda^0 \leq f(x) + g'(x) \lambda^0 \text{ для всех } x \in Q,$$

т. е. неравенство (16) теперь получено для общего случая (без использования производных от  $f(x)$ ,  $g(x)$  и специального вида  $Q$ ). Теорема Куна — Таккера доказана.

**4. Линейные ограничения.** Рассмотрим задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min, \quad Ax - b \leq 0, \quad x \geq 0, \quad (25)$$

где  $f(x) \in C^1$ ,  $A = A(I, J) — m \times n$ -матрица,  $b = b(I) — m$ -вектор,  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Для задачи (25) лемма 1 допускает усиление.

**Лемма 2.** Для каждого плана  $x^0$  и вектора  $l_* = l_*(J)$ , удовлетворяющего неравенствам

$$A(I_0(x^0), J) l_* \leq 0, \quad l_*(J_0(x^0)) \geq 0, \quad (26)$$

вектор  $x_t = x^0 + l_* t$ ,  $t \in [0, t_0]$ , является планом задачи (25), если  $t_0 > 0$  — достаточно малое число.

**Доказательство.** Действительно, неравенства  $x_t(J_+) \geq 0$ ,  $A(I_+, J) x_t \leq b(I_+)$  ( $I_+ = I_+(x^0) = I \setminus I_0$ ,  $I_0 = I_0(x^0)$ ,  $J_+ = J \setminus J_0$ ) следует при достаточно малых  $t$  из неравенств  $x^0(J_+) > 0$ ,  $A(I_+, J) x^0 < b(I_+)$ . Остальные ограничения выполняются в силу (26):

$$\begin{aligned} A(I_0, J) x_t &= A(I_0, J) x^0 + A(I_0, J) l_* t \leq 0, \\ x_t(J_0) &= x^0(J_0) + l_*(J_0) t = l_*(J_0) t \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заменив лемму 1 на лемму 2, получим теоремы 2—4 без предположения о регулярности множества планов.

**З а м е ч а н и я.** 1. Результат этого пункта можно доказать и без предположения  $f(x) \in C^{(1)}$ .

2. Задача  $f(x) \rightarrow \min, Ax - b = 0, x \geq 0$ , является задачей выпуклого программирования, если  $f(x)$  — выпуклая функция. Предлагается для этой задачи (хотя бы в случае  $f(x) \in C^{(1)}$ ) доказать теорему Куна — Таккера.

### § 3. Теория двойственности

Теорема Куна — Таккера позволяет естественным образом ввести *двойственную задачу* и доказать *соотношения двойственности*, которые в совокупности с аналогичными результатами линейного программирования составляют законченную *теорию двойственности выпуклого программирования*.

**1. Двойственная задача, соотношения двойственности.** Рассмотрим основную задачу выпуклого программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q, \quad (1)$$

с регулярным множеством планов  $X$ , т. е. в предположении, что для некоторого плана  $x^*$  выполняется неравенство  $g(x^*) < 0$ .

По элементам  $f(x)$ ,  $g(x)$  задачи (1) с помощью  $m$ -вектора  $\lambda$  составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'g(x),$$

которую рассмотрим при  $x \in Q, \lambda \geq 0$ .

Введем *прямую*  $\varphi(x)$ ,  $x \in Q$ , и *двойственную*  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ , функции

$$\varphi(x) = \sup_{\lambda} F(x, \lambda), \quad \lambda \geq 0; \quad \psi(\lambda) = \inf_x F(x, \lambda), \quad x \in Q. \quad (2)$$

Задачу

$$\varphi(x) \rightarrow \min, \quad x \in Q, \quad (3)$$

назовем *прямой задачей*, задачу

$$\psi(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \geq 0, \quad (4)$$

— *двойственной задачей* выпуклого программирования.

Множество  $\{x: \varphi(x) < \infty\}$  называется *множеством*

прямых планов, множество  $\Lambda = \{\lambda: \psi(\lambda) > -\infty\}$  — множеством двойственных планов.

Поскольку  $\varphi(x) = f(x)$ , если  $x \in X$ ;  $\varphi(x) = \infty$ , если  $x \notin X$ , то множество прямых планов совпадает с множеством планов задачи (1), а задача (3) — с задачей (1). В силу этого и задачу (1) будем называть *прямой задачей выпуклого программирования*.

Нетрудно проверить, что в случае линейных функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  и множества  $Q = \{x: x \geq 0\}$  задача (4) совпадает с двойственной задачей линейного программирования (см. гл. I, § 2).

Решения  $x^0$ ,  $\lambda^0$  задач (3), (4) удовлетворяют следующим *соотношениям двойственности*, выражающим тесную связь между прямой и двойственной задачами:

1) для существования решения  $x^0$  прямой задачи необходимо существование решения  $\lambda^0$  двойственной задачи;

2) на решениях  $x^0$ ,  $\lambda^0$  задач (3), (4) выполняется равенство

$$\varphi(x^0) = \psi(\lambda^0);$$

3) для каждой пары  $\{x, \lambda\}$  из прямого и двойственного планов выполняется неравенство

$$\varphi(x) \geq \psi(\lambda);$$

4) если на некоторой паре  $\{x^*, \lambda^*\}$  из прямого и двойственного планов выполняется равенство

$$\varphi(x^*) = \psi(\lambda^*),$$

то  $x^*$ ,  $\lambda^*$  — решения задач (3), (4);

5) если вдоль некоторой последовательности  $\lambda^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ), двойственных (прямых) планов целевая функция двойственной (прямой) задачи не ограничена, то пусто множество прямых (двойственных) планов;

6) на решениях  $x^0$ ,  $\lambda^0$  задач (3), (4) выполняется условие дополняющей нежесткости

$$g'(x^0)\lambda^0 = 0;$$

7) решение  $\lambda^0$  двойственной задачи (4) представляет вектор Лагранжа, соответствующий оптимальному плану  $x^0$  задачи (1);

8) для того чтобы векторы  $x^0$ ,  $\lambda^0$  были решениями задач (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы они были компонентами седловой точки функции Лагранжа;

9) справедлива теорема о минимаксе:

$$\min_{x \in Q} \max_{\lambda \geq 0} F(x, \lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in Q} F(x, \lambda).$$

Доказательство. Из определения функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(\lambda)$  следуют неравенства

$$\varphi(x) \geq F(x, \lambda) \geq \psi(\lambda), \quad (5)$$

справедливые для любых планов  $x$  и  $\lambda$  прямой и двойственной задач. Тем самым имеет место соотношение 3). Соотношения 4) и 5) являются следствиями соотношения 3). Пусть  $x^0$  — решение прямой задачи. Если  $\lambda^0$  — соответствующий ему вектор Лагранжа, то из теоремы Куна — Таккера получаем

$$\varphi(x^0) = F(x^0, \lambda^0) = \psi(\lambda^0), \quad (6)$$

откуда в силу (5) следует, что  $\lambda^0$  — решение двойственной задачи (4). Таким образом, справедливы соотношения 1) и 2). Обратно, если  $\lambda^0$  — решение двойственной задачи (4), то из соотношения 2) (с учетом (5)) следует, что  $\lambda^0$  — вектор Лагранжа, соответствующий оптимальному плану  $x^0$  прямой задачи (соотношение 7)). При этом условие (6) означает, что справедлива теорема о минимаксе (соотношение 9)). Соотношение 6) следует из соотношения 7) и теоремы Куна — Таккера. Необходимая часть соотношения 8) следует из соотношения 7) и теоремы Куна — Таккера.

Если же  $\{x^0, \lambda^0\}$  — седловая точка функции Лагранжа, то, по определению,  $\varphi(x^0) = \psi(\lambda^0)$ , что в силу соотношения 4) означает:  $x^0, \lambda^0$  — решения прямой и двойственной задач (3), (4). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из существования решения двойственной задачи (4) не следует существование решения прямой задачи (3). Прямая задача  $f(x) = x_1^2 + 1/x_2 \rightarrow \min$ ,  $g(x) = x_1 \leq 0$ ,  $Q = \{x : x_2 > 0\}$ ,  $x \in R_2$ , не имеет решения. Двойственная к ней задача  $\psi(\lambda) = -\lambda^2/4 \rightarrow \max$ ,  $\lambda \geq 0$ , имеет решение  $\lambda^0 = 0$ .

В следующих пунктах приводятся простейшие приложения теории двойственности. Следует подчеркнуть: идеи и результаты теории двойственности находят разнообразные применения в теории экстремальных задач и в известном смысле характеризуют современный уровень численных методов.



**2. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.** Рассмотрим задачу о максимальном потоке:

$$v^0 = \max_{x, v} v, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = \begin{cases} v, & \text{если } i = s, \\ -v, & \text{если } i = t, \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \\ 0, & \text{если } i \in I^0, \quad (i, j) \in U, \end{cases} \quad (7)$$

на сети  $S = \{I, U\}$ ,  $I = I^0 \cup s \cup t$ , с источником  $s$  и стоком  $t$ . Число  $d_{ij}$  называется *пропускной способностью дуги*  $(i, j)$ . Решение  $x^0 = \{x_{ij}^0, (i, j) \in U\}$  задачи (7) называется *максимальным потоком*,  $v^0$  — *величиной максимального потока*.

Функция Лагранжа для задачи (7) имеет вид

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= -v + \sum_{i \in I} \lambda_i \left[ \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} \right] - \lambda_s v + \lambda_t v = \\ &= v(\lambda_t - \lambda_s - 1) + \sum_{(i, j) \in U} (\lambda_i - \lambda_j) x_{ij}. \end{aligned}$$

Вычислим двойственную функцию

$$\psi(\lambda) = \sup_{0 \leq x \leq d, v} F(x, \lambda) = \begin{cases} \sum_{\substack{\lambda_i - \lambda_j > 0, \\ (i, j) \in U}} (\lambda_i - \lambda_j) d_{ij}, & \text{если } \lambda_t - \lambda_s = 1, \\ \infty, & \text{если } \lambda_t - \lambda_s \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом, задача

$$\sum_{\substack{\lambda_i - \lambda_j > 0, \\ (i, j) \in U}} (\lambda_i - \lambda_j) d_{ij} \rightarrow \min_{\lambda}, \quad \lambda_t - \lambda_s = 1, \quad (8)$$

является двойственной к (7).

Согласно теории двойственности на решениях  $x^0, \lambda^0$  задач (7), (8) выполняется равенство

$$v^0 = \sum_{\substack{\lambda_i^0 - \lambda_j^0 > 0, \\ (i, j) \in U}} (\lambda_i^0 - \lambda_j^0) d_{ij}. \quad (9)$$

Если к сети  $S$  добавить дугу  $(t, s)$  и положить  $c_{ts}=1$ ,  $c_{ij}=0$ ,  $(i, j) \in U$ , то задача (7) становится задачей о потоке минимальной стоимости. Пусть ее решение  $\{x_{ij}^0, (i, j) \in U^0, x_{ts}^0 = v^0\}$  получено методом потенциалов.

Как показано в п. 1 § 2 гл. I, оптимальные потенциалы узлов  $u_i^0$ ,  $i \in I$ , составляют решение двойственной задачи (8), т. е.

$$\lambda_i^0 = u_i^0, \quad i \in I. \quad (10)$$

Согласно методу потенциалов потенциал одного из узлов можно выбрать произвольно. Положим  $u_s^0 = 1$ . Тогда  $u_t^0 = 0$  и потенциалы  $u_i^0$  остальных узлов  $i \in I^0$  принимают одно из двух значений: 0 или 1. Построим множество

$$I^1 = \{i \in I: u_i^0 = 1\}. \quad (11)$$

Ясно, что  $s \in I^1$ ,  $t \notin I^1$ .

Для произвольного множества узлов  $I^* \subset I$ ,  $s \in I^*$ ,  $t \notin I^*$ , множество дуг  $U^* = U(I^*) = \{(i, j) \in U: i \in I^*, j \notin I^*\}$  называется *разрезом (сети)*, соответствующим множеству  $I^*$ . Число  $\sum_{(i, j) \in U^*} d_{ij}$  — значение разреза. Раз-

рез с минимальным значением — *минимальный*.

**Теорема (Форда — Фалкерсона).** Величина максимального потока равна значению минимального разреза.

**Доказательство.** Из (9) с учетом (10), (11) имеем

$$v^0 = \sum_{(i, j) \in U(I^1)} d_{ij},$$

т. е. величина максимального потока равна значению разреза  $U(I^1)$ . Покажем, что разрез  $U(I^1)$  — минимальный.

Рассмотрим произвольное множество  $I^* \subset I$ ,  $s \in I^*$ ,  $t \notin I^*$ , и построим по нему следующий план задачи (8):

$$\lambda_s = 1, \text{ если } i \in I^*; \quad \lambda_i = 0, \text{ если } i \notin I^*.$$

Значение целевой функции задачи (8) на этом плане равно  $\sum_{(i, j) \in U(I^*)} d_{ij}$ . Из оптимальности плана (10) в задаче

(8) следует неравенство  $\sum_{(i, j) \in U(I^1)} d_{ij} \leq \sum_{(i, j) \in U(I^*)} d_{ij}$ , которое означает, что разрез  $U(I^1)$  — минимальный. Теорема доказана.

Предлагается по схеме доказательства теоремы Форда — Фалкерсона доказать следующее утверждение: для существования потока  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$  в сети  $S = \{I, U\}$ :

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I; \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U,$$

необходимо и достаточно, чтобы 1)  $a(I) = 0$ : интенсивность  $a(I)$  множества узлов  $I$  ( $a(I) = \sum_{i \in I} a_i$ ) равнялась нулю; 2)  $a(I^*) \leq d(I^*)$ : интенсивность  $a(I^*)$  произвольного множества  $I^* \subset I$  не превосходила значения  $d(I^*)$  порожденного им разреза.

**3. Решение одной задачи квадратичного программирования.** Рассмотрим задачу

$$c'x + x'Dx/2 \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad (12)$$

с положительной  $n \times n$ -матрицей  $D$  и  $m \times n$ -матрицей  $A$ ,  $\text{rang } A = m < n$ .

По функции Лагранжа  $F(x, \lambda) = c'x + x'Dx/2 + \lambda'(Ax - b)$  составим двойственную функцию

$$\psi(\lambda) = \min_{x \in R_n} (c'x + x'Dx/2 + \lambda'(Ax - b)). \quad (13)$$

Поскольку минимизируемая функция в (13) строго выпукла ( $D > 0$ ), то точка ее минимума  $x(\lambda)$  совпадает со стационарной точкой  $(\partial F(x(\lambda), \lambda)/\partial x = 0)$  функции Лагранжа:  $c + Dx(\lambda) + A'\lambda = 0$ . Отсюда

$$x(\lambda) = -D^{-1}(A'\lambda + c). \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим

$$\psi(\lambda) = -1/2(c' + \lambda'A)D^{-1}(A'\lambda + c) - \lambda'b. \quad (15)$$

Двойственная к (12) задача состоит в максимизации функции  $\psi(\lambda)$ ,  $\lambda \in R_n$ . Поскольку  $AD^{-1}A' > 0$ , то функция  $\psi(\lambda)$  — строго вогнутая ( $-\psi(\lambda)$  — строго выпуклая функция). Точка ее максимума  $\lambda^0$  совпадает со стационарной точкой  $(\partial \psi(\lambda^0)/\partial \lambda = 0)$ :  $AD^{-1}(c + A'\lambda^0) + b = 0$ .

Отсюда

$$\lambda^0 = -[AD^{-1}A']^{-1}(b + AD^{-1}c). \quad (16)$$

Подставив (16) в (14), получим оптимальный план  $x^0 = x(\lambda^0)$  задачи (12).

**4. Двойственная задача геометрического программирования.** Функция  $f(t)$ ,  $t = \{t_1, \dots, t_m\} \in R_m$ , вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad u_i(t) = c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}, \quad c_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

называется *позиномом*, матрица  $\{a_{ij}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}\}$  — ее *матрицей экспонент*. *Геометрическим программированием* называют раздел математики, в котором исследуются задачи минимизации позиномов на множествах, заданных с помощью позиномных неравенств.

Рассмотрим следующую задачу геометрического программирования:

$$f(t) \rightarrow \min, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

где  $f(t)$  — позином (17).

Прологарифмировав функции  $u_i$  и введя новые переменные  $x_j = \ln t_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $x_{m+i} = \ln u_i$ ,  $b_i = -\ln c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , от задачи (18) перейдем к эквивалентной задаче выпуклого программирования с линейными ограничениями

$$\sum_{i=1}^n e^{x_{m+i}} \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - x_{m+i} = b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

С помощью функции Лагранжа

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n e^{x_{m+i}} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - x_{m+i} - b_i \right)$$

запишем задачу, двойственную к (19):

$$\psi(\lambda) = \inf_x F(x, \lambda) \rightarrow \max. \quad (20)$$

Опишем множество двойственных планов  $\{\lambda_i: \psi(\lambda) < \infty\}$ . Нижняя грань функции  $F(x, \lambda)$  по  $x_{m+i}$  достигается в точке

$$x_{m+i} = \ln \lambda_i. \quad (21)$$

Следовательно, двойственные планы удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Подсчитав  $\inf F(x, \lambda)$  по переменным  $x_j, j = \overline{1, m}$ , найдем, что двойственные планы удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Обратно: каждый вектор  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , удовлетворяющий соотношениям (22), (23), является двойственным планом.

Подставив (21) в (20), с учетом (22), (23) получим двойственную к (19) задачу

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i + \ln \prod_{i=1}^n (c_i / \lambda_i)^{\lambda_i} \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если строки матрицы экспонент образуют *положительный базис* (из  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ij} = 0, j = \overline{1, m}; \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ , следует  $\lambda_i \equiv 0, i = \overline{1, n}$ ), то задача (24) имеет единственный план  $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$ . Из теории двойственности выпуклого программирования следует, что исходная задача (18) решается тривиально:  $t_j \equiv 0, j = \overline{1, m}$ . В дальнейшем из рассмотрения исключается этот тривиальный случай.

В силу однородности ограничений задачи (24) ее решение ищем в виде

$$\lambda_i = \alpha \delta_i, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \alpha > 0.$$

Задача (24) в новых переменных:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \delta_i (1 + \ln c_i / \alpha \delta_i) \rightarrow \max; \quad \sum_{i=1}^n \delta_j a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Переменная  $\alpha$  входит только в целевую функцию. Вычислив в (25) максимум по  $\alpha$  (он достигается в точке

$\alpha = \prod_{i=1}^n (c_i/\delta_i)^{\delta_i}$ , получим другую эквивалентную форму двойственной задачи (24):

$$\begin{aligned} \psi(\delta) = \prod_{i=1}^n (c_i/\delta_i)^{\delta_i} \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n \delta_i a_{ij} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \delta_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Двойственная задача (26) часто проще исходной прямой задачи (18). Существует класс задач (18), для которых ограничения задачи (26) удовлетворяет единственная совокупность  $\{\delta_i, i = \overline{1, n}\}$ . В этих случаях операция максимизации в (26) становится излишней.

**Пример.** Для перевозки через реку 400 м<sup>3</sup> гравия нужно изготовить открытый ящик размерами  $t_1 \times t_2 \times t_3$  (длина, ширина, высота). Боковые стенки и дно ящика изготавливаются из материала, 1 м<sup>2</sup> которого стоит 10 руб., передняя и задняя стенки — из материала стоимостью 20 руб./м<sup>2</sup>. Каждый рейс стоит 10 коп. При каких размерах  $t_1^0, t_2^0, t_3^0$  общие затраты будут минимальными, если ящик после перевозки всего гравия выбрасывается?

Объем ящика равен  $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$  м<sup>3</sup>. На перевозку 400 м<sup>3</sup> потребуется  $400/t_1 t_2 t_3$  рейсов, и это будет стоить  $40 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1}$  руб. Стоимость материалов на изготовление ящика равна  $40 t_2 t_3 + 20 t_1 t_3 + 10 t_1 t_2$ . Таким образом, математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f(t) = 40 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} + 40 t_2 t_3 + 20 t_1 t_3 + 10 t_1 t_2 \rightarrow \min, \quad t_1, t_2, t_3 > 0, \\ \text{т. е. } m = 3, \quad n = 4, \quad c_1 = 40, \quad c_2 = 40, \quad c_3 = 20, \quad c_4 = 10,$$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{Bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Для этих значений выпишем ограничения задачи (26):

$$\begin{aligned} -\delta_1 &+ \delta_3 + \delta_4 = 0, \\ -\delta_1 + \delta_2 &+ \delta_4 = 0, \\ -\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0, \\ +\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 &= 1. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение:  $\delta_1^0 = 2/5, \delta_2^0 = 1/5, \delta_3^0 = 1/5, \delta_4^0 = 1/5$ . Следовательно, операция максимизации в (26) исчезает и оптимальное значение двойственной целевой функции равно  $(40/[2/5])^{2/5} \cdot (40/[1/5])^{1/5} \cdot (20/[1/5])^{1/5} \cdot (10/[1/5])^{1/5} = 100$  руб.

Из соотношения двойственности 2) § 3 следует, что 100 руб. — минимальные затраты на перевозку гравия. Для вычисления  $t_1^0, t_2^0, t_3^0$  воспользуемся обозначением  $x_{m+i} = \ln u_i$ , свойством (21)  $x_{m+i}^0 = \ln \lambda_i^0$ , обозначением  $\lambda_i = \alpha \delta_i$  и тем фактом, что  $\alpha^0 = \psi(\delta^0)$ . Таким образом, справедливы равенства  $u_i(t^0) = \psi(\delta^0) \delta_i^0, i = \overline{1, n}$ .

Для рассматриваемой задачи они имеют следующий вид:  $100 \cdot 2/5 = 40 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1}, 100 \cdot 1/5 = 40 t_2 t_3, 100 \cdot 1/5 = 20 t_1 t_3$ . Отсюда находим оптимальные размеры ящика:  $t_1^0 = 2$  м,  $t_2^0 = 1$  м,  $t_3^0 = 0,5$  м.

#### § 4. Алгоритм решения квадратичной задачи

Излагается конечный метод решения общей задачи выпуклого квадратичного программирования, который является обобщением симплекс-метода.

**1. Постановка задачи. Критерий оптимальности.** Каноническая задача выпуклого квадратичного программирования имеет вид

$$f(x) = x'Dx/2 + c'x \rightarrow \min, Ax = b, x(J_+) \geq 0. \quad (1)$$

Здесь  $x = x(J), c = c(J)$  —  $n$ -векторы;  $b = b(I)$  —  $m$ -вектор;  $A = A(I, J)$  —  $m \times n$ -матрица;  $D = D(J, J)$  — симметричная, неотрицательная  $n \times n$ -матрица;  $I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}, J_+ \subset J$ .

Любую неособую  $m \times m$ -матрицу  $A_B = A(I, J_B), J_B \subset J$ , будем называть *базисной*. Пару  $\{x, A_B\}$ , состоящую из плана  $x$  и базисной матрицы  $A_B$ , назовем *опорным планом* задачи (1). Опорный план  $\{x, A_B\}$  считается *невырожденным*, если  $x_{B+} = x(J_{B+}) > 0, J_{B+} = J_B \cap J_+$ .

**Замечание.** Если  $I = \emptyset$  (т. е. в задаче (1) отсутствуют основные ограничения), то  $A_B = 0, J_B = \emptyset$ .

Из выражения  $A_B x_B + A_N x_N = b, A_N = A(I, J_N), J_N = J \setminus J_B$ , следует

$$x_B = r_0 + R x_N, \quad (2)$$

где  $r_0 = \{r_{i0}, i \in J_B\} = A_B^{-1} b, R = R(J_B, J_N) = \{r_j(J_B), j \in J_N\} = -A_B^{-1} A_N$ . Обозначим символом  $z_j(J), j \in J_N \cup 0$ , вектор с компонентами

$$z_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, i \in J_B, \\ 0, i \in J_N \setminus j, j \in J_N; \\ 1, i = j, \end{cases} z_{i0} = \begin{cases} r_{i0}, i \in J_B, \\ 0, i \in J_N, \end{cases} \quad (3)$$

и положим

$$Z = Z(J, J_H) = \{z_j, j \in J_H\}.$$

Согласно (2), (3) любой план  $x$  задачи (1) допускает представление

$$x = z_0 + Zx_H. \quad (4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(x) &= x' D x / 2 + c' x = (z_0 + Zx_H)' D (z_0 + Zx_H) / 2 + c' (z_0 + \\ &+ Zx_H) = x_H' Z' D Z x_H / 2 + z_0' D Z x_H / 2 + x_H' Z D z_0 / 2 + \\ &+ z_0' D z_0 / 2 + c' z_0 + c' Z x_H = \frac{1}{2} x_H' H x_H + h_0' x_H + h_{00} / 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $H = H(J_H, J_H) = Z' D Z$ ,  $h_0 = h_0(J_H) = Z(Dz_0 + c)$ ,  $h_{00} = z_0' D z_0 + 2c' z_0$ .

Нетрудно видеть, что матрица  $H$  симметрична и неотрицательна.

Наряду с опорным планом  $\{x, A_B\}$  рассмотрим план  $\bar{x} = x + \Delta x$ . Подсчитаем приращение целевой функции:

$$\begin{aligned} \Delta f(\bar{x}, x) &= f(\bar{x}) - f(x) = (\bar{x}_H' H \bar{x}_H - x_H' H x_H) / 2 + \\ &+ h_0' (\bar{x}_H - x_H) = \Delta x_H' H \Delta x_H / 2 + \Delta x_H' (H x_H + h_0). \end{aligned}$$

Введя вектор оценок

$$\Delta_H = \Delta(J_H) = H x_H + h_0, \quad (6)$$

получаем формулу приращения

$$\Delta f(\bar{x}, x) = \Delta x_H' H \Delta x_H / 2 + \Delta x_H' \Delta_H. \quad (7)$$

**Теорема 1 (критерий оптимальности).** Для оптимальности опорного плана  $\{x, A_B\}$  достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо выполнение соотношений

$$\begin{aligned} \Delta_j \geq 0, x_j = 0; \Delta_j = 0, x_j > 0, j \in J_{H+}; \Delta_j = 0, j \in J_{H-}; \\ J_{H+} = J_H \cap J_+, J_{H-} = J_H \setminus J_{H+}. \end{aligned} \quad (8)$$

**Доказательство. Достаточность.** Пусть для опорного плана  $\{x, A_B\}$  выполнены условия (8). Так как  $H \geq 0$  и  $\Delta x_j \geq 0$  при  $x_j = 0, j \in J_{H+}$ , то для любого плана  $\bar{x} = x + \Delta x$  имеем

$$\Delta f(\bar{x}, x) = \Delta x_H' H \Delta x_H / 2 + \Delta x_H' \Delta_H \geq 0,$$

т. е.  $x$  — оптимальный план задачи (1).



**Необходимость.** Предположим, что для невырожденного оптимального опорного плана  $\{x, A_B\}$  соотношения (8) не выполняются и  $j_0 \in J_H$  — тот индекс, на котором они нарушаются. Положим

$$l = -z_{j_0} \operatorname{sign} \Delta_{j_0}. \quad (9)$$

Так как опорный план  $\{x, A_B\}$  невырожден, то найдется такое число  $\Theta_0 > 0$ , что для любого  $\Theta$ ,  $0 < \Theta \leq \Theta_0$ , точка  $x + \Theta l$  является планом задачи (1). Из формулы приращения (7) с учетом (9) имеем

$$\Delta f(x + \Theta l, x) = \Theta l'_H \Delta_H - \Theta^2 l'_H H l_H / 2 = -\Theta |\Delta_{j_0}| + \frac{1}{2} \Theta^2 h_{j_0 j_0}.$$

В силу  $|\Delta_{j_0}| > 0$  правая часть последнего выражения для достаточно малых  $\Theta > 0$  отрицательна. Это противоречит оптимальности плана  $x$ . Теорема доказана.

**2. Итерация.** Предположим, что на опорном плане  $\{x, A_B\}$  не выполняются соотношения (8). Из доказательства теоремы 1 видно, что вдоль направления (9) целевая функция задачи (1) уменьшается. Поэтому с целью улучшения плана  $x$  будем двигаться вдоль этого направления:  $x(\Theta) = x + \Theta l$ ,  $\Theta \geq 0$ . При этом естественно потребовать, чтобы 1) движение не выводило за пределы множества планов задачи (1), т. е.  $\Theta \leq \min_{j \in J_+} \Theta_j$ , где  $\Theta_j =$

$= -x_j/l_j$ ,  $l_j < 0$ ; 2) движение происходило до тех пор, пока значение целевой функции уменьшается, т. е.  $\Theta \leq \Theta_f$ , где  $\Theta_f$  находится из условия  $\Delta f(x + \Theta_f l, x) = \min_{\Theta} \Delta f(x + \Theta l, x)$ , которое эквивалентно равенству  $\partial \Delta f(x + \Theta_f l, x) / \partial \Theta = 0$ .

Таким образом, максимально допустимый шаг  $\Theta^0$  вдоль  $l$  равен

$$\Theta^0 = \min\{\Theta_{i_0}, \Theta_f\}. \quad (10)$$

Здесь  $\Theta_{i_0} = \min_{j \in J_+} \Theta_j$ ,

$$\Theta_j = \begin{cases} -x_j/l_j, & \text{если } l_j < 0, \\ \infty, & \text{если } l_j \geq 0; \end{cases} \quad \Theta_f = \begin{cases} |\Delta_{j_0}|/h_{j_0 j_0}, & \text{если } h_{j_0 j_0} > 0, \\ \infty, & \text{если } h_{j_0 j_0} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что для невырожденного опорного плана величина  $\Theta^0$  положительна ( $\Theta^0 > 0$ ).

Равенство  $\Theta^0 = \infty$  означает, что движение вдоль  $l$

никогда не выводит на границу множества планов задачи (1) и при этом целевая функция убывает с постоянной скоростью. В этом случае решение задачи (1) прекращается, поскольку целевая функция не ограничена снизу на множестве планов.

Пусть  $\Theta^0 < \infty$ . Строим новый план  $\bar{x}$  по формуле

$$\bar{x} = x + \Theta^0 l.$$

Этому плану приписываем базисную матрицу  $\bar{A}_B$ , вид которой определяется следующим образом:

а)  $\Theta^0 = \Theta_{i_0}$ ,  $i_0 \in J_B$ . Полагаем  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ ,  $\bar{J}_B = (J_B \setminus i_0) \cup \cup j_0$ . Как и в симплекс-методе, показывается, что матрица  $\bar{A}_B$  является базисной.

б)  $\Theta^0 = \Theta_{i_0}$ ,  $i_0 = j_0$ . Полагаем  $\bar{A}_B = A_B$ .

в)  $\Theta^0 = \Theta_f$ . Полагаем  $\bar{A}_B = A_B$ , но в отличие от случаев а), б) с новым опорным планом свяжем множество  $\bar{J}_0 = \{j_0\} \subset J_N$ , т. е. будем впредь использовать следующую запись:  $\{\bar{x}, \bar{A}_B\}_{\bar{J}_0}$ . Можно считать, что для начального опорного плана  $J_0 = \emptyset$ , а в случаях а), б)  $\bar{J}_0 = \emptyset$ .

Представление (5) целевой функции зависит от базисной матрицы. Поэтому в случае а) элементы  $\bar{H}$ ,  $\bar{h}_0$ ,  $\bar{h}_{00}$  представления будут новыми:

$$f(x) = x'(\bar{J}_N) \bar{H} x(\bar{J}_N)/2 + \bar{h}'_0 x(\bar{J}_N) + \bar{h}_{00}/2.$$

Получим формулы, связывающие элементы  $\bar{H}$ ,  $\bar{h}_0$ ,  $\bar{h}_{00}$  с  $H$ ,  $h_0$ ,  $h_{00}$ . Для этого запишем функцию (5) следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2} x_N^{*'} H^* x_N^*, \quad (11)$$

где  $x_N^* = x(J_N^*) = \{1, x_N\}$ ,  $J_N^* = 0 \cup J_N$ ,  $H^* = H(J_N^*, J_N^*)$ . Поскольку  $r_{i_0 j_0} \neq 0$ , то из (2) следует

$$x_{j_0} = -\frac{r_{i_0 0}}{r_{i_0 j_0}} + \frac{1}{r_{i_0 j_0}} x_{i_0} - \sum_{j \in J_N} \frac{r_{i_0 j}}{r_{i_0 j_0}} x_j.$$

Поэтому

$$x(J_N^*) = M(J_N^*, \bar{J}_N^*) x(\bar{J}_N^*), \quad (12)$$

где  $\bar{J}_N^* = 0 \cup \bar{J}_N$ ,

$$M(J_H^*, \bar{J}_H^*) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & .0 & 0 & . & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & .1 & 0 & . & . & . & .0 \\ -r_{i_0 0}/r_{i_0 j_0} & . & . & .1/r_{i_0 j_0} & . & . & .-r_{i_0 j_{n-m}}/r_{i_0 j_0} & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & .1 \end{bmatrix} \dots j_0 \quad (13)$$

$$\vdots$$

$$i_0$$

В силу (12)

$$f(x) = x_H^{*'} H^* x_H^*/2 = x' (\bar{J}_H^*) M' (J_H^*, \bar{J}_H^*) H^* M (J_H^*, \bar{J}_H^*) \times$$

$$\times x (\bar{J}_H^*)/2 = x' (\bar{J}_H^*) \bar{H}^* x' (\bar{J}_H^*)/2, \quad \bar{H}^* = M' (J_H^*, \bar{J}_H^*) H^* \times$$

$$\times M (J_H^*, \bar{J}_H^*).$$

Из последнего равенства получаем

$$\bar{H} = M' H M, \quad M = M (J_H, \bar{J}_H), \quad \bar{h}_0 = M' (J_H^*, \bar{J}_H) H^* M (J_H^*, 0),$$

$$\bar{h}_{00} = M' (J_H^*, 0) H^* M (J_H^*, 0). \quad (14)$$

На этом описание первой итерации заканчивается.

Предположим, что на  $k$ -й итерации получен опорный план  $\{x^k, A_B^k\}_{J^k}$ , на котором соотношения (8) не выполняются, но такой, что 1)  $\Delta_j^k = 0, j \in J_0^k$ , 2) если  $J_0^k \neq \emptyset$ , то  $H_0^k = H^k (J_0^k, J_0^k) > 0$ . Нетрудно видеть, что опорный план  $\{x^2, A_B^2\}_{J^2} = \{x, \bar{A}_B\}_{\bar{J}_0}$ , полученный после первой итерации, удовлетворяет условиям 1), 2) с  $H_0^2 = \bar{H} (\bar{J}_0, \bar{J}_0)$ .

Обозначим через  $j_k \in J_H^k$  индекс компоненты плана  $x^k$ , на котором нарушаются условия оптимальности (8). Поскольку при соблюдении тождеств

$$\Delta_j^k (\Theta) = h_{j_0}^k + H^k (j, J_H^k) (x_H^k + \Theta l_H^k) \stackrel{\Theta}{=} 0, \quad j \in J_0^k, \quad (15)$$

вдоль направления  $l^k$  постоянно выполняются условия оптимальности по переменным  $x_j$ ,  $j \in J_0^k$ , то соотношения (15) положим в основу построения направления  $l^k$ , вдоль которого план  $x^k$  будет улучшаться. Направление  $l^k$  будем искать в виде

$$l^k = -z_{j_k}^k \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k + \sum_{j \in J_0^k} \gamma_j^k z_j^k. \quad (16)$$

Для вычисления коэффициентов  $\gamma_j^k$ ,  $j \in J_0^k$ , из (6), (15) получается уравнение

$$H_0^k \gamma^k = \beta^k \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k, \quad (17)$$

$\gamma^k = \{\gamma_j^k, j \in J_0^k\}$ ,  $\beta^k = H^k(J_0^k, j_k)$ , которое всегда имеет решение  $\gamma^k = G^k \beta^k \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k$ ,  $G^k = (H_0^k)^{-1}$ .

Нетрудно видеть, что  $\partial f(x^k)/\partial l^k < 0$ , т. е. целевая функция убывает вдоль направления  $l^k$ .

По аналогии с (10) подсчитывается максимально допустимый шаг  $\Theta^k$  вдоль  $l^k$ :

$$\Theta^k = \{\Theta_{i_0}^k, \Theta_f^k\},$$

где  $\Theta_{i_0}^k = \min_{j \in J_+} \Theta_j^k$ ,

$$\Theta_j^k = \begin{cases} -x_j^k/l_j^k, & \text{если } l_j^k < 0 \\ \infty, & \text{если } l_j^k \geq 0 \end{cases}, \quad j \in J_+;$$

$$\Theta_f^k = \begin{cases} |\Delta_{j_k}^k|/\alpha^k, & \text{если } \alpha^k > 0, \\ \infty, & \text{если } \alpha^k = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^k &= l_N^{k'} H^k l_N^k = l^{k'} (J_0^k) H_0^k l^k (J_0^k) - 2 \beta^{k'} l^k (J_0^k) \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k + \\ &+ h_{j_k}^k i_k = h_{j_k}^k i_k - \beta^{k'} \gamma^k \operatorname{sign} \Delta_{j_k}^k. \end{aligned}$$

Если  $\Theta^k = \infty$ , то решение задачи (1) оканчивается, так как получено направление  $l^k$  бесконечного убывания целевой функции.

Пусть  $\Theta^k < \infty$ . Тогда строится новый план

$$x^{k+1} = x^k + \Theta^k l^k.$$

Для построения новой базисной матрицы  $A_B^{k+1}$  и нового множества  $J_0^{k+1}$  рассмотрим следующие случаи:

а)  $\Theta^k = \Theta_{i_0}^k$ ,  $i_0 \in J_B$ . Полагаем  $A_B^{k+1} = A(J, J_B^{k+1})$ ,  $J_B^{k+1} = (J_B^k \setminus i_0) \cup j_0$ ,  $J_0^{k+1} = J_0^k \setminus j_0$ . Здесь индекс  $j_0$  таков, что  $r_{j_0 j_0}^k \neq 0$ , и выбирается следующим образом:  $j_0 \in J_0^k$ , если  $r_{i_0 j}^k \neq 0$ ,  $j \in J_0^k$ ;  $j_0 = j_k$  — в противном случае.

б)  $\Theta^k = \Theta_{i_0}^k$ ,  $i_0 \in J_0^k$ . Полагаем  $A_B^{k+1} = A_B^k$ ,  $J_0^{k+1} = J_0^k \setminus i_0$ .

в)  $\Theta^k = \Theta_{i_0}^k$ ,  $i_0 = j_k$ . Полагаем  $A_B^{k+1} = A_B^k$ ,  $J_0^{k+1} = J_0^k$ .

г)  $\Theta^k = \Theta_f^k$ . Полагаем  $A_B^{k+1} = A_B^k$ ,  $J_0^{k+1} = J_0^k \cup j_k$ .

Новый опорный план  $\{x^{k+1}, A_B^{k+1}\}_{J_0^{k+1}}$  в случаях б), в)

в силу принципа (15) построения направления  $l^k$  удовлетворяет условию 1). Рассмотрим случай а). Имеем

$$\Delta^{k+1}(J_0^k) = H^{k+1}(J_0^k, J_N^{*k+1}) x_N^{*k+1}.$$

Поскольку  $H^{*k+1} = M^{k'}(J_N^{*k}, J_N^{*k+1}) H^{*k} M^k(J_N^{*k}, J_N^{*k+1})$ , где матрица  $M^k(J_N^{*k}, J_N^{*k+1})$  строится аналогично (13), то

$$H^{k+1}(J_0^k, J_N^{*k+1}) = M^{k'}(J_N^{*k}, J_0^{k+1}) H^{*k} M^k(J_N^{*k}, J_N^{*k+1})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1}(J_0^k) &= M^{k'}(J_N^{*k}, J_0^{k+1}) H^{*k} M(J_N^{*k}, J_N^{*k+1}) x_N^{*k+1} = \\ &= M^{k'}(J_N^{*k}, J_0^k) H^{*k} x^{k+1}(J_N^{*k}) = M^{k'}(J_N^{*k}, J_0^k) \bar{\Delta}_N^{*k}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\bar{\Delta}_N^{*k} = \bar{\Delta}^k(J_N^{*k})$  — вектор с компонентами  $\bar{\Delta}_j^k = \Delta_j^k(\Theta^k)$ ,  $j \in J_N^k$ ,  $\bar{\Delta}_0^k = H^k(0, J_N^{*k}) x^{k+1}(J_N^{*k})$ .

По построению матрицы  $M^k(J_N^{*k}, J_N^{k+1})$  и в силу выбора индекса  $j_0$  имеем  $M^k(J_N^{*k} \setminus J_0^k, J_0^{k+1}) = 0$ . Поэтому из (15), (18) следует

$$\Delta^{k+1}(J_0^{k+1}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

В случае г) равенство  $\Delta^{k+1}(J_0^k) = 0$  очевидно. Подсчитаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{j_k}^{k+1} &= \Delta_{j_k}^k + \Theta_f^k(\beta^{k'} \gamma^k - h_{j_k j_k}^k \text{sign } \Delta_{j_k}^k) = \Delta_{j_k}^k - \\ &- \Theta_f^k \alpha^k \text{sign } \Delta_{j_k}^k = \Delta_{j_k}^k - |\Delta_{j_k}^k| \text{sign } \Delta_{j_k}^k = 0, \end{aligned}$$

т. е. снова  $\Delta^{k+1}(J_0^{k+1}) = 0$ .

Покажем, что опорный план  $\{x^{k+1}, A_B^{k+1}\}_{J_0^{k+1}}$  обладает и свойством 2).

В случае а), обозначив  $\bar{J}_0^{k+1} = J_0^{k+1} \cup i_0$  при  $j_0 \in J_0^k$  и  $\bar{J}^{k+1} = J_0^{k+1}$  при  $j_0 = j_k$ , имеем

$$\bar{H}^{k+1} = H^{k+1}(\bar{J}_0^{k+1}, \bar{J}_0^{k+1}) = M^{k'}(J_{\text{H}}^k, \bar{J}_0^{k+1}) H^k \times \\ \times M^k(J_{\text{H}}^k, \bar{J}_0^{k+1}) = M^{k'}(J_0^k, \bar{J}_0^{k+1}) H_0^k M^k(J_0^k, \bar{J}_0^{k+1}). \quad (19)$$

Поскольку  $H_0^k > 0$ ,  $\det M^k(J_0^k, \bar{J}_0^{k+1}) \neq 0$ , то  $\bar{H}^{k+1} > 0$ . Матрица  $H_0^{k+1}$  положительна как диагональный минор матрицы  $\bar{H}^{k+1} > 0$ .

В случае б):  $H_0^{k+1} > 0$  как диагональный минор матрицы  $H_0^k > 0$ ; в случае в):  $H_0^{k+1} = H_0^k > 0$ .

Рассмотрим случай г). Предположим, что матрица  $H_0^{k+1}$  не является положительной, т. е. найдется такой ненулевой вектор  $\xi = \xi(J_0^{k+1})$ , что

$$H_0^{k+1} \xi = 0. \quad (20)$$

Из (20) следует

$$H_0^k \xi(J_0^k) + \beta^k \xi_{j_k} = 0,$$

причем  $\xi_{j_k} \neq 0$ , так как в противном случае получается противоречие с положительностью матрицы  $H_0^k$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $\xi_{j_k} = 1$ . Тогда

$$\xi(J_0^k) = -G^k \beta^k = -\gamma^k \text{sign } \Delta_{j_k}^k. \quad (21)$$

Из (20), (21) имеем

$$H^k(j_k, J_0^{k+1}) \xi = \beta^{k'} \xi(J_0^k) + h_{j_k j_k}^k \xi_{j_k} = h_{j_k j_k}^k - \\ - \beta^{k'} \gamma^k \text{sign } \Delta_{j_k}^k = \alpha^k = 0.$$

Но  $\alpha^k > 0$ , так как  $\Theta^k = \Theta_f^k < \infty$ . Полученное противоречие доказывает, что  $H_0^{k+1} > 0$ .

При  $|J_0^k| = 1$ , где  $|J_0^k|$  — количество элементов множества  $J_0^k$ , вычисление матрицы  $G^k$ , обратной к  $H_0^k$ , не вызывает затруднений. Получим формулы для рекуррентного пересчета  $G^k$  при  $|J_0^k| > 1$ . При их выводе потребуются известные из линейной алгебры формулы. Для симметричной матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} S & q \\ q' & t \end{pmatrix}$$

при  $p = t - q' S^{-1} q \neq 0$  существует обратная

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} + \frac{S^{-1} q q' S^{-1}}{p}, & -\frac{S^{-1} q}{p} \\ -\frac{q' S^{-1}}{p}, & \frac{1}{p} \end{pmatrix}.$$

Обратно, если

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} Q & u \\ u' & v \end{pmatrix},$$

то при  $v \neq 0$  справедлива формула

$$S^{-1} = Q - \frac{u u'}{v}.$$

Рассмотрим случай а). Пусть

$$\begin{aligned} \bar{G}^{k+1} &= \bar{G}^{k+1} (\bar{J}_0^{k+1}, \bar{J}_0^{k+1}) = (\bar{H}^{k+1})^{-1}, \quad N^k = N^k (J_H^{k+1}, J_H^k) = \\ &= [M^k (J_H^k, J_H^{k+1})]^{-1}. \end{aligned}$$

Из (19) следует

$$\bar{G}^{k+1} = N^k G^k N^k.$$

Матрица  $N^k (J_H^{k+1}, J_H^k)$  имеет вид

$$N^k (J_H^{k+1}, J_H^k) = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ r_{i_0 j_1}^k & . & . & . & . & . & r_{i_0 j_0}^k & . & . & . & . & r_{i_0 j_{n-m}}^k \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \dots i_0$$

$\vdots$   
 $j_0$

Поэтому матрица  $\bar{G}^{k+1}$  отличается от  $G^{k+1}$  лишь строкой и столбцом, соответствующими индексу  $i_0$ , если  $j_0 \in J_0^k$ ;  $\bar{G}^{k+1} = G^k$  при  $j_0 = j_k$ . Отсюда следует, что

$$G^{k+1} = G^k \text{ при } j_0 \in J_0^k$$

и

$$G^{k+1} = G^k (J_0^{k+1}, J_0^{k+1}) - \frac{\bar{G}^{k+1} (J_0^{k+1}, i_0) \bar{G}^{k+1} (i_0, J_0^{k+1})}{\bar{G}^{k+1} (i_0, i_0)} \quad (22)$$

при  $j_0 \in J_0^k$ .

В случае б) по аналогии с (22) имеем

$$G^{k+1} = G^k (J_0^{k+1}, J_0^{k+1}) - \frac{G^k (J_0^{k+1}, i_0) G^k (i_0, J_0^{k+1})}{G^k (i_0, i_0)}.$$

В случае в) очевидно, что  $G^{k+1} = G^k$ .

В случае г) всегда  $\alpha^k > 0$  и поэтому

$$G^{k+1} = \begin{pmatrix} G^k + \frac{\gamma^k \gamma^{k'}}{\alpha^k}, & -\frac{\gamma^k \text{sign } \Delta_{j_k}^k}{\alpha^k} \\ -\frac{\gamma^{k'} \text{sign } \Delta_{j_k}^k}{\alpha^k}, & \frac{1}{\alpha^k} \end{pmatrix}.$$

**3. Конечность метода.** Описанный в п. 2 метод, вообще говоря, не является конечным. Однако простое дополнительное правило позволяет гарантировать это важное свойство. Положим:

$$J_{\text{кр}}^k = \{j: j \in J_{\text{H}+}^k, x_j^k = 0\}, J_{\Delta}^k = \{j: j \in J_{\text{H}}^k \setminus J_{\text{кр}}^k, \Delta_j^k \neq 0\}.$$

Компоненты плана  $x_j^k, j \in J_{\text{кр}}^k$ , назовем *критическими*.

*Дополнительное правило.* На каждой итерации при  $J_{\Delta}^k \neq \emptyset$  элемент  $j_k$  выбирается из  $J_{\Delta}^k$ , т. е. улучшение опорного плана осуществляется, если это возможно, без изменения его критических компонент.

**Теорема 2.** Для любого начального опорного плана описанный метод конечен, если в процессе его работы с соблюдением дополнительного правила встречается конечное число вырожденных опорных планов.

**Доказательство.** Покажем, что если  $\{x^k, A_{\text{Б}}^k\}_{J_0^k}$  — невырожденный неоптимальный опорный план, то  $\Theta^{k+p} \neq \neq 0, p = 0, 1, \dots$ . Действительно,  $|J_0^k| \leq n - m$ . Если



$\Theta^{k+p} = 0$ , то  $\Theta^{k+p} = \Theta_{i_0}^{k+p}$ ,  $i_0 \in J_0^{k+p}$ , и, следовательно,  $|J_0^{k+p+1}| = |J_0^{k+p}| - 1$ . Поэтому найдется такое число  $p_0 \leq n - m$ , что  $J_0^{k+p_0} = \emptyset$ . В силу невырожденности опорного плана  $\{x^{k+p_0}, A_B^{k+p_0}\}_{J_0^{k+p_0}} = \{x^k, A_B^k\}_{J_0^{k+p_0}}$  максимально допустимый шаг  $\Theta^{p_0+k}$  положителен ( $\Theta^{k+p_0} > 0$ ).

В силу предположения о конечности числа вырожденных опорных планов можно считать, что  $\Theta^k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Докажем, что из любого опорного плана  $\{x^k, A_B^k\}$ ,  $J_\Delta^k \neq \emptyset$ , за конечное число  $p$  итераций будет построен план  $\{x^{k+p}, A_B^{k+p}\}$ , для которого  $J_\Delta^{k+p} = \emptyset$ . Пусть это не так: для любого  $p > 0$  множество  $J_\Delta^{k+p} \neq \emptyset$ . Тогда в силу дополнительного правила выполняется включение  $J_\Delta^{k+p} \supset J_\Delta^k$ , т. е. существует такое число  $p_0$ , что  $|J_{кр}^{k+p}| \equiv \text{const}$ ,  $p \geq p_0$ . Значит,  $\Theta^{k+p} = \Theta_f^{k+p}$ ,  $p \geq p_0$ , и  $|J_0^{k+p+1}| = |J_0^{k+p}| + 1$ ,  $p \geq p_0$ . Другими словами,  $|J_0^{k+p}| \rightarrow \infty$  при  $p \rightarrow \infty$ , что противоречит неравенству  $|J_0^{k+p}| \leq n - m$ .

Итак, за конечное число итераций будет построен такой опорный план  $\{x^k, A_B^k\}_{J_0^k}$ , что  $J_\Delta^k = \emptyset$ .

Рассмотрим задачу

$$x' Dx/2 + c' x \rightarrow \min, Ax = b, x(J_+) \geq 0, x(J_{кр}^k) = 0. \quad (23)$$

Нетрудно видеть (доказательство аналогично доказательству достаточности теоремы 1), что  $\{x, A_B^k\}_{J_0^k}$  — оптимальный план задачи (23). Если при этом  $\Delta^k(J_{кр}^k) \geq 0$ , то он оптимален и в задаче (1). В противном случае за конечное число итераций будет построен другой план  $x^{k_1}$ , который является решением задачи (23) при  $k = k_1$  и на котором целевая функция принимает меньшее значение, так как  $\Theta^k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Поэтому процесс решения задачи (1) можно рассматривать как построение последовательности планов, оптимальных для различных задач типа (23). В силу убывания целевой функции от плана к плану ни одна из задач (23) не повторится дважды. Поскольку различных задач типа (23) конечное число, а оптимальный план задачи (1) является оптимальным для одной из них, то задача (1) будет решена за конечное число итераций. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Если  $D=0$ ,  $x^1$  — базисный план, то описанный метод совпадает с симплекс-методом.

2. Метод применим для решения квадратичных задач с симметричной матрицей  $D$ , удовлетворяющей условию  $y'Dy \geq 0$  при  $Ay=b$ ,  $y(J_+) \geq 0$ .

3. Для решения задачи  $y'Dy \rightarrow \min$ ,  $Ay=0$ ,  $y(J_+) \geq 0$ , встречающейся в теории необходимых условий второго порядка, изложенный метод непосредственно не применим. В этом случае используются методы невыпуклого квадратичного программирования.

4. **Пример.** Рассмотрим задачу

$$x_1^2/2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6, -x_1 + x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Введя свободные переменные  $x_3, x_4$ , перейдем к канонической форме

$$\frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6, -x_1 + x_2 + x_4 = 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

В качестве элементов начального опорного плана выберем  $x^1 = \{0, 0, 6, 5\}$ ,  $A_B^1 = \{a_3, a_4\}$ . Тогда  $J_H^1 = \{1, 2\}$ ,  $r_0^1 = \{6, 5\}$ ,

$$R^1 = \begin{Bmatrix} -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{Bmatrix},$$

$$Z^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{Bmatrix}.$$

$$z_0^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{Bmatrix}.$$

Т а б л. II.1

$a_H$		$a_0$	$a_1$	$a_2$
$a_B$	$x_H$	1	0	0
	$x_B$			
$a_3$	6	6	-2	-1
$a_4$	5	5	+1	-1
$a_0$		0	-3	-4
$a_1$		-3	1	-1
$a_2$		-4	-1	2
$a_H$	$\Delta$		-3	-4

Отсюда

$$H^1 = Z^{1'} D Z^1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ +1 & -1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Bmatrix},$$

$$h_0^1 = \{-3, -4\}, h_{00}^1 = 0.$$

При ручном счете удобно пользоваться таблицами. Начальную информацию внесем в табл. II.1, которая состоит из двух частей. Верхняя часть таблицы аналогична упрощенной симплексной таблице (из которой удалены единичные столбцы) и состоит из элементов

$x_{ij}^1, i \in J_B^1, j \in J_H^{*1}$ , разложения вектора  $a_0 = b$  и векторов  $(-a_j), j \in J_H^1$ , по базису  $a_j, j \in J_B^1$ . В строке  $x_H$  записан вектор  $x_H^{*1} = \{x_0^1, x_H^1\} = \{1, 0, 0\}$  (см. (11)). В нижнюю часть таблицы занесены числа  $h_{ij}^1, i, j \in J_H^{*1}$ , — элементы матрицы  $H^{*1}$  из представления (11) в начальном базисе, а также компоненты  $\Delta_j^1$  вектора оценок  $\Delta_H^1$ . Как видно из (6), компонента  $\Delta_j^1, j \in J_H^1$ , получается суммированием соответствующих произведений элементов строки  $x_H$  в верхней части таблицы и строки  $a_j$  — в нижней.

Т а б л. II.2

$a_H$ $a_B$		$a_0$	$a_1$	$a_2$
	$x_H$ $x_B$	1	0	2
$a_3$	4	6	-2	-1
$a_4$	3	5	1	-1
$a_0$		0	-3	-4
$a_1$		-3	1	-1
$a_2$		-4	-1	2
$a_H$ $\Delta$			-5	0

$\uparrow$    \*

Т а б л. II.3

$a_H$ $a_B$		$a_0$	$a_1$	$a_3$
	$x_H$ $x_B$	1	8/5	0
$a_2$	14/5	6	-2	-1
$a_4$	19/5	-1	3	1
$a_0$	6	-24	5	4
$a_1$	-2	-9	3	1
$a_2$	-1	8	-5	-2
$a_H$ $\Delta$				

Для выбора индекса  $j_k$  будем пользоваться правилом  $\Delta_{j_k}^k = \min \Delta_j^k$ , где  $j \in J_\Delta^k$ , если  $J_\Delta^k \neq \emptyset$ . При  $J_\Delta^k = \emptyset$  выбираются  $j \in J_H^k$ , для которых числа  $x_{j_k}^k, \Delta_{j_k}^k$  не удовлетворяют условиям оптимальности (8). В нашем случае (на первой итерации  $k=1$ )  $j_1=2$ . Отметим строку и столбец  $a_2$  стрелками. Согласно правилам метода  $l^1 = -z_2^1 \text{sign } \Delta_2^1 = -z_2^1 = \{0, 1, r_{32}^1, r_{42}^1\} = \{0, 1, -1, -1\}$ . Компоненты  $r_{j_2}^1, j \in J_B^1$ , вектора  $z_2^1$  берем из столбца  $a_2$  в верхней части таблицы. Вычислим  $\Theta_3^1 = -x_3^1/l_3^1 = 6, \Theta_4^1 = 5$ , а также  $\Theta_f^1 = |\Delta_2^1|/h_{22}^1 = 4/2 = 2$  ( $h_{22}^1$  находится на пересечении строки и столбца, отмеченных стрелками). Следовательно,  $\Theta^1 = \Theta_f^1$  и  $x^2 = x^1 + \Theta^1 l^1 = \{0, 0, 6, 5\} + 2 \cdot \{0, 1, -1, -1\} = \{0, 2, 4, 3\}$ . Для нового опорного плана  $\{x^2, A_B^2\}$  базисная матрица  $A_B^2$  совпадает с  $A_B^1$ . Поэтому в новой табл. II.2 основная часть табл. II.1 остается без изменений. Изменяют-

ся только компоненты плана и вектора оценок. Звездочками в табл. II. 2 отмечены столбец и строка, соответствующие компоненте  $x_2$ , индекс которой введен в множество  $J_0^2: J_0^2 = \{2\}$ . Для нового опорного плана получаем  $j_2 = 1$ . Строим направление  $l^2 = z_1^2 \operatorname{sign} \Delta_1^2 + \gamma_2^2 z_2^2$  улучшения плана  $x^2$ . Коэффициент  $\gamma_2^2$  найдем из уравнения (15). Матрица  $H_0^2$  состоит из элементов, находящихся на пересечении столбцов и строк, отмеченных звездочками, вектор  $\beta^2$  — из элементов на пересечении столбца, отмеченного стрелкой, и строк, отмеченных звездочками. В данном случае  $H_0^2 = \{2\}$ ,  $\beta = \{-1\}$  и поэтому  $2\gamma_2^2 = 1$ , или  $\gamma_2^2 = 1/2$ . Следовательно,  $l^2 = z_1^2 + 1/2 z_2^2 = \{1, 0, -2, 1\} + 1/2 \cdot \{0, 1, -1, -1\} = \{1, 1/2, -5/2, 1/2\}$ ,  $\Theta_f^2 = |\Delta_1^2|/(h_{11}^2 - \beta^{2'} \gamma^2 \operatorname{sign} \Delta_1^2) = 10$ ,  $\Theta_{i_0}^2 = \Theta_3^2 = \frac{8}{2}$ ,  $\Theta^2 = \min \{\Theta_3^2, \Theta_f^2\} = \Theta_3^2$ . Вектор  $a_3$  выводим из базиса, а на его место вводим  $a_2$ , поскольку  $J_0^2 = \{2\} \neq \emptyset$ ,  $r_{32}^2 = -1 \neq 0$ . Элемент  $r_{32}^2$ , а также строку и столбец, на пересечении которых он стоит, назовем ведущими. Ведущий элемент заключен в рамку. В п. 2 было показано, что

$$H^{*k+1} = M' (J_N^{*k}, J_N^{*k+1}) H^{*k} M (J_N^{*k}, J_N^{*k+1}),$$

где матрица  $M (J_N^{*k}, J_N^{*k+1})$  имеет структуру (13). Аналогично можно показать, что матрица  $R^{*k+1}$  получается из матрицы

$$\bar{R}^{*k+1} = R^{*k} M (J_N^{*k}, J_N^{*k+1})$$

заменой  $i_0$ -й строки на строку  $\{-r_{i_0 0}^k/r_{i_0 j_0}^k, \dots, 1/r_{i_0 j_0}^k, \dots, r_{i_0 j_{n-m}}^k/r_{i_0 j_0}^k\}$ .

Эти формулы реализуются на табл. II. 2 в два этапа.

Этап I. а) Элементы  $r_{ij_0}^k$ ,  $i \neq i_0$ ,  $i \in J_B^k$ ;  $h_{jj_0}^k$ ,  $j \in J_N^{*k}$ , ведущего столбца (за исключением ведущего элемента) делим на  $r_{i_0 j_0}^k$ .

б) Элементы ведущей строки  $r_{i_0 j}^k$ ,  $j \in J_N^{*k}$ ,  $j \neq j_0$  (кроме ведущего), делим на  $(-r_{i_0 j_0}^k)$ .

в) Остальные элементы  $r_{ij}^{k+1}$ ,  $i \in J_B^{k+1} \setminus j_0$ ,  $j \in J_N^{*k+1} \setminus i_0$ ;  $\tilde{h}_{ij}^{k+1}$ ,  $i, j \in J_N^{*k+1}$ ,  $j \neq i_0$ , вычисляем по правилу прямоугольника.

г) На место ведущего элемента записывается величина, ему обратная.

Табл. II.3, полученная после этапа I, называется промежуточной. Элементы ее верхней части являются соответствующими элементами матрицы  $R^{*3}$  и вычислены окончательно. В нижней части находятся элементы матрицы  $\tilde{H}^{*k+1} = \tilde{H}^{*3} = H^{*2} M^{*2}$ . Для получения элементов  $h_{ij}^{k+1} = h_{ij}^3$  матрицы  $H^{*k+1} = H^{*3} = M^{*2'} \tilde{H}^{*3}$  переходим ко второму этапу, на котором преобразуется только нижняя часть таблицы.

$a_6$	$a_H$		$a_0$	$a_1$	$a_3$
	$x_6$	$x_H$	1	8/5	0
$a_2$	14/5	6	-2	-1	
$a_4$	19/5	-1	3	1	
$a_0$			24	-25	-8
$a_1$			-25	13	5
$a_3$			-8	5	2
			-21/5	0	

↑

$a_6$	$a_H$		$a_0$	$a_1$	$a_3$
	$x_6$	$x_H$	1	25/13	0
$a_2$	28/13	6	-2	-1	
$a_4$	62/13	-1	3	1	
$a_0$			24	-25	-8
$a_1$			-25	13	5
$a_3$			-8	5	2
$a_H$	$\Delta$		0	21/13	

\*

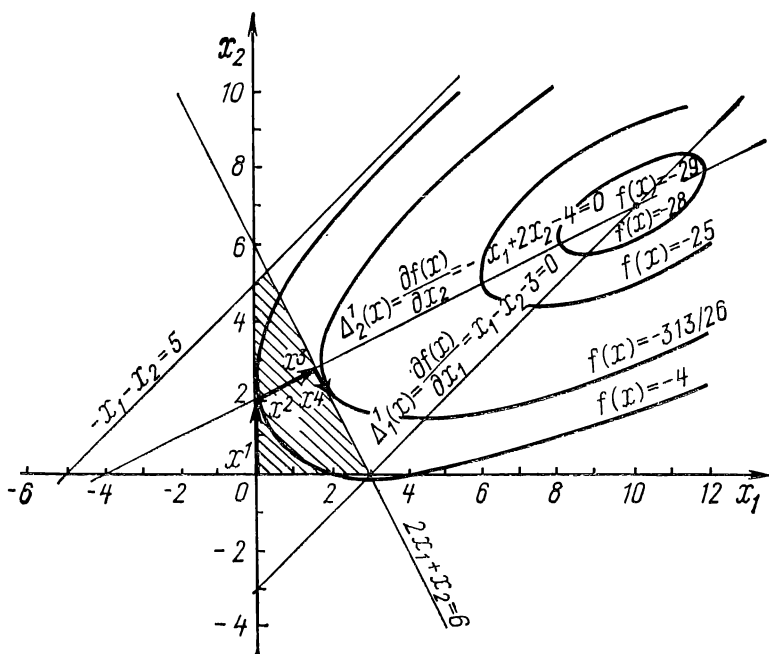


Рис. II.10

Этап II. а) В столбец промежуточной таблицы, который в табл. II.1 и табл. II.2 оставался пустым, записываем элементы  $x_{i_0j}^k$ ,  $j \in J_N^k$ , ведущей строки предыдущей таблицы.

б) Строку  $a_{i_0}$  (в которой теперь находится ведущий элемент  $r_{i_0j_0}^k$ ) делим на  $r_{i_0j_0}^k$ .

в) Остальные элементы  $h_{ij}^{k+1}$ ,  $i \in J_N^{k+1} \setminus j_0$ ,  $j \in J_N^{k+1}$ , вычисляем по правилу прямоугольника с ведущим элементом  $r_{i_0j_0}^k$  в нижней части промежуточной таблицы.

Вычислив по табл. II. 4, полученной после второго этапа, вектор оценок  $\Delta_N^3$ , имеем  $j_3 = 1$ . Поскольку  $J_0^3 = \emptyset$ , то  $l^3 = \{1, -2, 0, 3\}$  и  $\Theta^3 = \Theta_f^3 = 21/65$ . Табл. II. 5, соответствующая новому плану  $x^4$ , отличается от табл. II. 4 только вектором оценок и компонентами плана. Как нетрудно видеть, она удовлетворяет условиям оптимальности. Следовательно,  $x^4 = \{25/13, 28/13, 0, 62/13\}$  — оптимальный план. На рис. II. 10 дается геометрическая иллюстрация итераций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кюнц Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование.— М.: Сов. радио, 1962.
2. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М.: Наука, 1975.
3. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.

## Глава III. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Нелинейным программированием* называется раздел математики, в котором исследуются задачи оптимизации функций на множествах конечномерного пространства. В данной главе излагается *теория* нелинейного программирования; *вычислительные методы* нелинейного программирования будут изложены в гл. IV.

### § 1. Общая задача нелинейного программирования

В общей постановке задача нелинейного программирования имеет чрезвычайно простую форму. Однако для нее нет сколько-нибудь содержательных результатов. Уже теоремы существования предполагают наличие определенных свойств у элементов задачи. В связи с этим общая задача нелинейного программирования исследуется только в форме более конкретных задач.

**1. Критерий существования решения.** Пусть  $X$  — мно-

жество конечномерного пространства  $R_n$ . Элементы  $x$  множества  $X$ , следуя гл. I, будем называть *планами* (*допустимыми точками, векторами*). Предположим, что на множестве планов  $X$  определена функция \*)  $f(x)$ ,  $x \in X$ , которую назовем *целевой функцией*. *Общая задача нелинейного программирования*

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X, \quad (1)$$

состоит в минимизации целевой функции на множестве планов. Задачи максимизации  $f(x) \rightarrow \max, x \in X$ , сводятся к (1) заменой функции  $f(x)$  на  $-f(x)$ .

Решение  $x^0$  задачи (1):

$$f(x^0) = \min f(x), x \in X,$$

называется *оптимальным планом*.

Далеко не каждая задача (1) имеет решение.

На рис. III.1 приведены простейшие примеры задачи (1), в которых по разным причинам не существует оптимальных планов. Для формулировки теоремы существования решений задачи (1) используются функции, полунепрерывные снизу.

Говорят, что функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , *полунепрерывна снизу* в точке  $x^* \in X$ , если

$$\liminf f(x) = f(x^*), x \rightarrow x^*, x \in X.$$

Функция  $f(x)$  *полунепрерывна на множестве  $X$* , если она полунепрерывна в каждой точке множества  $X$ .

Множество

$$\{x: f(x) \leq c\}, \quad (2)$$

где  $c$  — скаляр, называется *множеством уровня функции  $f(x)$*  (со значением  $c$ ).

Функция  $f(x)$  полунепрерывна снизу на  $R_n$  тогда и только тогда, когда каждое множество уровня или пусто, или замкнуто.

Множество  $\{x: f(x) \leq \min f(x)\}$  назовем *множеством минимального уровня*.

**Теорема 1 (критерий существования решений задач нелинейного программирования).** Для существования решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы при

---

\*) Всюду считается, что  $f(x)$  — скалярная функция; случай векторной функции рассматривается отдельно в § 6.

некотором  $c$ ,  $-\infty < c < \infty$ , множество уровня целевой функции  $f(x)$  было множеством минимального уровня или непустым компактом, на котором  $f(x)$  полунепрерывна снизу.

**Доказательство. Необходимость.** Если  $X^0$  — множество оптимальных планов, то множество уровня

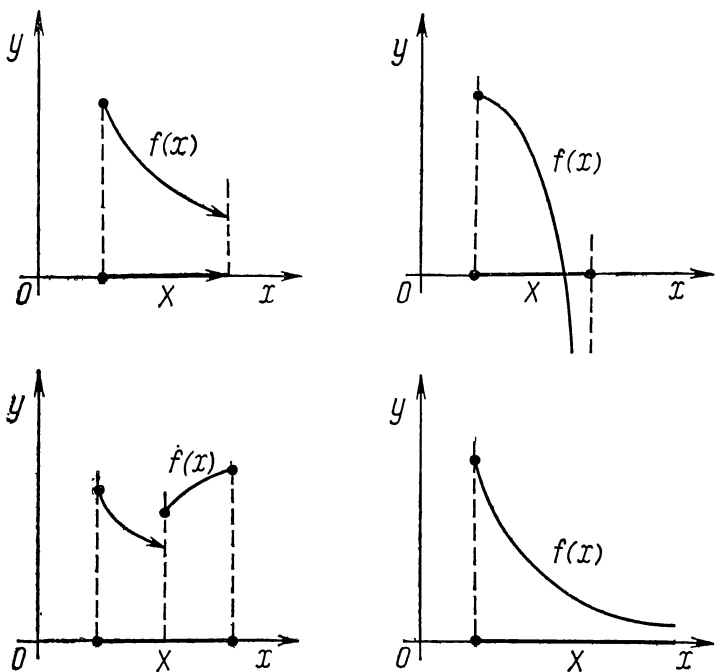


Рис. III.1

$\{x: f(x) \leq c\}$ ,  $c = f(x^0)$ ,  $x^0 \in X^0$ , совпадает с  $X^0$  и на нем функция  $f(x)$  полунепрерывна снизу:  $f(x) \equiv f(x^0)$ ,  $x \in X^0$ . Необходимость доказана.

**Достаточность.** Случай минимального уровня тривиален. Пусть при некотором  $-\infty < c < \infty$  множество уровня (2) непусто и компактно. Ясно, что каждый оптимальный план, если он существует, принадлежит этому множеству. Поэтому в задаче (1) множество  $X$  можно заменить на построенное множество уровня. По теореме Вейерштрасса каждая функция, полунепрерывная снизу, достигает минимума на компакте. Следовательно, задача (1) имеет решение  $x^0$ . Теорема доказана.



Для проверки компактности множеств (2) часто используется следующий факт: множество уровня полу-непрерывной снизу, *бесконечно большой функции*:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

для любого  $c$  является компактным.

Действительно, если допустить, что при некотором  $c_*$  множество (2) не компактно, то оно не ограничено и найдется последовательность  $x^k$ ,  $k \rightarrow \infty$ , точек из множества (2),  $c = c_*$ , такая, что  $\|x^k\| \rightarrow \infty$ . В силу (3) при некотором  $k_0 < \infty$  будет выполняться неравенство  $f(x^{k_0}) > c_*$ , что противоречит (2).

Сильно выпуклые функции являются бесконечно большими:  $(f(x) = f(0) + x' \partial f(0) / \partial x + x' [\partial^2 f(\tilde{x}) / \partial x^2] x / 2 \geq f(0) + x' \partial f(0) / \partial x + \mu \|x\|^2 \rightarrow \infty \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty)$ . Поэтому с такой целевой функцией задача (1) имеет решение при любом замкнутом множестве планов  $X$ . Строго выпуклые целевые функции этим свойством не обладают. Например, задача  $f(x) = \exp(-x) \rightarrow \min$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \in R_1$ , не имеет решения, хотя  $\partial^2 f(x) / \partial x^2 = \exp(-x) > 0$ ,  $x \geq 0$ .

Для специальных задач доказаны более удобные для проверки теоремы существования решений. Например, в задачах квадратичного выпуклого программирования для существования решений достаточно ограниченности снизу целевой функции на множестве планов. Последний из приведенных выше примеров показывает, что для неквадратичных задач это не так.

**2. Классификация задач.** При общих предположениях, принятых в п. 1 относительно элементов  $X$ ,  $f(x)$  задачи (1), не удастся получить сколь-нибудь интересные и полезные сведения о ее оптимальных планах. Поэтому задача (1) исследуется при дополнительных предположениях относительно  $X$ ,  $f(x)$ , которые порождают разнообразные классы задач, распространенные в приложениях и допускающие соответствующее классу детальное описание свойств оптимальных планов.

Прежде всего из нелинейного программирования выделяется класс задач линейного программирования, изученный в гл. I. За ним отдельно исследуются задачи выпуклого программирования (гл. II). В настоящее время количество классов задач, выделяемых из (1) дополнительными свойствами элементов  $X$ ,  $f(x)$ , велико. В названии каждого из этих классов присутствует, как правило, слово «*программирование*».

В данной главе изучаются четыре основных типа задач (1): 1) *задача на безусловный минимум*, когда  $X = R_n$ ; 2) *задача на условный минимум*, когда  $X = \{x: g(x) = 0\}$ ,  $g(x)$  —  $m$ -векторная функция; 3) *задача минимизации при ограничениях типа неравенств*, когда  $X = \{x: g(x) \leq 0\}$ ; 4) *задача векторной оптимизации*, когда  $f(x)$  — векторная функция. Пятый тип задачи (1) (*задача дискретного программирования*), в которой  $X$  — дискретное (конечное) множество планов, будет рассмотрен в гл. IV, V в связи с вычислительными методами минимизации.

## § 2. Задача на безусловный минимум

Для общей постановки задачи нелинейного программирования (§ 1) универсальный метод поиска оптимального плана состоит в переборе значений целевой функции на множестве планов. Этот метод редко реализуем даже на современных ЭВМ. Поэтому экстремальные задачи подвергаются, как правило, предварительным математическим исследованиям. Исследование задач минимизации направлено, с одной стороны, на выявление свойств (*необходимых условий минимума*), которыми обладают оптимальные планы и которые позволяют уменьшить объем перебора, а с другой — на формирование соотношений (*достаточных условий минимума*), выполнение которых на плане гарантирует оптимальность последнего. Необходимое условие минимума считается тем сильнее, чем меньше неоптимальных планов ему удовлетворяет. Достаточное условие минимума тем сильнее, чем шире класс задач, оптимальные планы которых ему удовлетворяют. Самым сильным необходимым условием минимума является то, которое совпадает с достаточным условием минимума, образуя *критерий минимума*. Если не считать общих, трудно проверяемых утверждений, критерии минимума известны лишь для сравнительно небольшого числа классов задач нелинейного программирования (см. гл. I, II). Распространенные, в некотором смысле легко проверяемые, условия минимума для сложных задач носят односторонний характер, являясь или необходимыми, или достаточными условиями. Исследования по необходимым и достаточным условиям минимума развиваются в направлении углубления условий обоих типов с целью их сближения. При этом условию минимума приписыв-

вается *порядок*  $k$ , если в его формулировке участвуют производные до  $k$ -го порядка включительно от элементов задачи.

**1. Необходимое условие минимума первого порядка. Стационарные точки.** Рассмотрим задачу на безусловный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in R_n, \quad (1)$$

в предположении, что функция  $f(x)$  (элемент задачи) определена и непрерывна в каждой точке  $x \in R_n$  вместе со всеми частными производными по  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , т. е.  $f(x) \in C^{(1)}$ .

*Определение 1.* Точку  $x^0$  назовем *оптимальным планом* (решением задачи (1), *точкой абсолютного* или *глобального минимума*), если

$$f(x^0) = \min f(x), \quad x \in R_n.$$

*Определение 2.* Точка  $x^0$  называется *локально оптимальным планом* (*точкой относительного* или *локального минимума*), если при некотором  $\varepsilon > 0$  выполняются соотношения

$$f(x^0) = \min f(x), \quad \|x - x^0\| \leq \varepsilon, \quad x \in R_n.$$

Каждый оптимальный план является и локально оптимальным при любом  $\varepsilon > 0$  (но не наоборот). В дальнейшем чаще всего речь будет идти о локально оптимальных планах и, говоря о решении задачи (1), будем иметь в виду именно их. Любое необходимое условие минимума для локально оптимального плана есть необходимое условие минимума и для (глобально) оптимального плана (но не наоборот).

В задачах выпуклого программирования каждый локально оптимальный план есть и глобально оптимальный. Действительно, если  $x^0 \in X$  — глобально оптимальный план,  $x^* \in X$  — локально оптимальный план и  $f(x^0) < f(x^*)$ , то из определения выпуклой функции при  $\lambda \in ]0, 1[$  получим неравенство  $f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^0) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^0) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x^*) = f(x^*)$ , которое противоречит локальной оптимальности плана  $x^*$ , ибо при малых  $(1-\lambda) > 0$  точка  $\lambda x^* + (1-\lambda)x^0 \in X$  попадает в сколь угодно малую окрестность плана  $x^*$ .

Обозначим через  $\partial f / \partial x$  вектор частных производных  $\{\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n\}$  (градиент  $\text{grad } f(x)$  функции  $f(x)$ ).

**Теорема 1.** На каждом локально оптимальном плане  $x^0$  выполняется условие стационарности

$$\partial f(x^0)/\partial x = 0, \quad (2)$$

т. е.  $\text{grad } f(x^0) = 0$ .

**Доказательство.** Предположим, что на  $x^0$  равенство (2) не выполняется:  $\partial f(x^0)/\partial x \neq 0$ . Из точки  $x^0$  начнем двигаться в таком направлении  $l_*$ , что

$$l_*' \partial f(x^0)/\partial x < 0, \quad (3)$$

т. е. рассмотрим траекторию  $x(t) = x^0 + l_* t$ ,  $t \geq 0$ . Производная целевой функции в момент  $t=0$  при этом движении с учетом (3) равна

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l_* < 0.$$

Следовательно, при всех достаточно малых  $t > 0$  будет выполняться неравенство

$$f(x(t)) < f(x^0), \quad (4)$$

которое противоречит оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

Приведенное доказательство конструктивно, поскольку указывает простое правило  $x(t) = x^0 + l_* t$  улучшения плана  $x^0$  в смысле (4), если последний не удовлетворяет необходимому условию оптимальности первого порядка (2). Подобные правила лежат в основе прямых методов решения задачи (1) (гл. IV).

Решения уравнения

$$\text{grad } f(x) = 0 \quad (5)$$

называются *стационарными точками функции*  $f(x)$ . Таким образом, согласно теореме 1 оптимальные планы находятся (если вообще существуют) среди стационарных точек целевой функции. Поэтому для построения решения задачи (1), имеющей оптимальные планы, достаточно найти стационарные точки целевой функции и, сравнив на них значения  $f(x)$ , отобрать наилучшую. Если перебор осуществляется по всем стационарным точкам, то в результате получится глобально оптимальный план.

Теорема 1 осуществляет редукцию задачи (1) к решению уравнения (5). Несмотря на сложность уравнения (5)

в общем случае, этот (*непрямой*) метод решения задачи (1) давно и широко используется на практике. При теоретическом исследовании и численном решении многих интересных и важных научных и прикладных задач он привел к ценным результатам.

**Пример 1.**  $f(x) = x^2 - 3x - 1$ . Множество  $\{x : x^2 - 3x - 1 \leq 0\}$  непусто (содержит точку  $x=0$ ), замкнуто и ограничено ( $f(x) \rightarrow \infty$  при  $|x| \rightarrow \infty$ ). Оптимальные планы существуют и удовлетворяют равенству (2):  $\partial f / \partial x = 2x - 3 = 0$ , которое имеет единственное решение  $x^* = 3/2$ . Следовательно,  $x^* = 3/2$  — оптимальный (глобальный) план.

**Пример 2.**  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$ . Уравнения стационарности (5)

$$2x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad 2x_2 - 2x_1 = 0$$

несовместны. Это означает, что задача (1) не имеет решения. В этом случае и задача максимизации  $f(x)$  не имеет решения, ибо, как нетрудно заметить, необходимое условие максимума для нее совпадает с (2).

**Пример 3.**  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$ . Уравнения стационарности

$$2x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \quad -2x_2 - 2x_1 = 0$$

имеют единственное решение  $x_1^* = -x_2^* = -1/4$ , которое, однако, не является оптимальным планом задачи (1), ибо  $f(-1/4, 1/4) = -1/8 > -1 = f(0, 1)$ .

«Странные» результаты примеров 2, 3 связаны с тем, что последние не имеют решений.

**2. Необходимое условие минимума второго порядка.** Пусть  $f(x) \in C^{(2)}$ . Найдем условия, позволяющие, вообще говоря, среди стационарных точек функции  $f(x)$  отбросить те, которые не могут быть оптимальными планами, и сократить, таким образом, перебор.

**Теорема 2.** На каждом оптимальном плане  $x^0$  матрица вторых производных целевой функции неотрицательна:

$$\partial^2 f(x^0) / \partial x^2 \geq 0. \quad (6)$$

**Доказательство.** Предположим, что вопреки (6) существует такой  $n$ -вектор  $l_*$ , что

$$l_*' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l_* < 0. \quad (7)$$

Построим траекторию  $x(t) = x^0 + l_* t$ ,  $t \geq 0$ . Согласно теореме 1 первая производная  $df(x(t))/dt|_{t=0}$  равна нулю. Вычислим вторую производную и учтем (7):

$$\frac{d^2 f(x(t))}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \frac{dx'(t)}{dt} \frac{\partial^2 f(x(t))}{\partial x^2} \times \\ \times \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial f'(x(t))}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_{t=0} = l'_* \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l_* < 0.$$

Таким образом, для всех достаточно малых  $t > 0$  опять выполняется неравенство (4), противоречащее оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и я.** 1. В теоремах 1, 2 использовалось простое движение  $x(t) = x^0 + l_* t$  по прямой. Можно проверить, что для доказательства теоремы 1 (но не теоремы 2) достаточно двигаться только вдоль координатных осей ( $x(t) = x^0 + e_j t$ ,  $j = \overline{1, n}$ ). Оказывается, более сложные движения, например,  $x(t) = x^0 + lt + pt^2$ ,  $t \geq 0$ , не позволяют усилить теоремы 1, 2.

2. Проверка неравенства (6) с помощью критерия Сильвестра при больших  $n$  трудоемка. В этом случае численными методами решают *присоединенную задачу о минимуме*:

$$l'_* \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l \rightarrow \min, \quad l \in R_n.$$

**П р и м е р 4.**  $f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$ . Уравнения стационарности

$$-2x_1 \exp(-x_1^2 - x_2^2) = 0, \quad -2x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2) = 0$$

имеют единственное решение  $x_1^* = x_2^* = 0$ , на котором условие (6) не выполняется:

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = \begin{Bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{Bmatrix} < 0.$$

Задача (1) не имеет решения.

Примеры 2—4 показывают, что с помощью необходимых условий минимума можно доказать и отсутствие оптимальных планов.

**3. Достаточное условие локального минимума.** Идея усиления необходимых условий минимума за счет привлечения производных высокого ( $k > 2$ ) порядка не получила развития при  $n \geq 2$  по двум причинам: 1) резко усложняется проверка условий; 2) существуют задачи, в которых привлечение производных сколь угодно высокого порядка не позволяет удалить из множества стационарных точек все неоптимальные планы. Между тем при условиях п. 2 незначительное изменение доказанных необходимых условий минимума дает возможность получить *достаточное условие минимума*.

**Теорема 3.** Стационарная точка  $x^*$  является локально оптимальным планом, если

$$\partial^2 f(x^*)/\partial x^2 > 0. \quad (8)$$

**Доказательство.** Согласно вычислениям пп. 1, 2 вдоль каждого движения  $x(t) = x^* + lt$  с  $\|l\| = 1$  в силу стационарности точки  $x^*$  и неравенства (8) выполняются соотношения

$$\left. \frac{df(x(t))}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 f(x(t))}{dt^2} \right|_{t=0} > 0.$$

Поэтому для каждого  $l$ ,  $\|l\| = 1$ , найдется такое  $t(l) > 0$ , что при всех  $0 < t < t(l)$  выполняется неравенство

$$f(x(t)) > f(x^*). \quad (9)$$

Из компактности множества  $\|l\| = 1$  следует, что существует такое постоянное число  $t_* > 0$ , что неравенство (9) справедливо при всех  $t$ ,  $l$ ,  $\|l\| = 1$ ,  $0 < t < t_*$ . Это означает, что  $x^*$  — точка локального минимума. Теорема доказана.

Как видно из доказательства теоремы 3, точка  $x^*$ , удовлетворяющая ее условиям, является *точкой строгого локального минимума*: при некотором  $\varepsilon > 0$

$$f(x^*) < f(x) \text{ для всех } x \in R_n, x \neq x^*, \|x - x^*\| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Поэтому достаточное условие минимума из теоремы 3 можно использовать только для задач, локально оптимальные планы которых удовлетворяют соотношениям (10).

**4. Условия минимума высокого порядка в одномерных задачах.** В скалярном случае ( $n=1$ ) теоремы 2, 3 допускают достаточно эффективное (для проверки) обобщение.

**Теорема 4.** Если для функции  $f(x) \in C^{(k)}$  в точке  $x^*$  выполняются соотношения

$$df(x^*)/dx = 0, \dots, d^{k-1}f(x^*)/dx^{k-1} = 0, d^k f(x^*)/dx^k \neq 0,$$

то 1)  $x^*$  — точка (строгого) локального минимума, если  $k$  — четное и  $d^k f(x^*)/dx^k > 0$ ; 2)  $x^*$  — точка (строгого) локального максимума, если  $k$  — четное и  $d^k f(x^*)/dx^k < 0$ ; 3)  $x^*$  не является ни точкой минимума, ни точкой максимума, если  $k$  — нечетное число.

Доказательство дается в анализе.

**5. Условия минимума на отрезке и для простых ограничений.** Доказательство теорем 2, 3 легко переносится на задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in [a, b], \quad x \in R_1.$$

**Теорема 5.** Для локальной оптимальности точки  $a(b)$  неравенство

$$df(a)/dx \geq 0 \quad (df(b)/dx \leq 0)$$

необходимо, а неравенство

$$df(a)/dx > 0 \quad (df(b)/dx < 0)$$

достаточно.

**Следствие.** Если  $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$  — решение задачи с простыми ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \geq 0, \quad x \in R_n,$$

то

$$\partial f(x^0)/\partial x_i = 0, \quad \text{если } x_i^0 > 0,$$

$$\partial f(x^0)/\partial x_i \geq 0, \quad \text{если } x_i^0 = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

### § 3. Задача на условный минимум

Эта задача, как и задача предыдущего параграфа, детально исследуется в курсах анализа. Материал включен в данный курс для полноты изложения и демонстрации некоторых современных методов исследования экстремальных задач.

**1. Обобщенное правило множителей Лагранжа.** Рассмотрим задачу на условный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) = 0, \tag{1}$$

в предположении, что ее элементы (функция  $f(x)$  и компоненты  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  функции  $g(x)$ ) принадлежат классу  $C^{(1)}$ .

**Определение 1.** План  $x^0 (g(x^0) = 0)$  назовем (глобально) оптимальным (решением задачи (1), точкой условного глобального (абсолютного) минимума), если

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) = 0.$$



**Определение 2.** План  $x^0$  называется *локально оптимальным* (точкой *условного локального (относительного) минимума*), если при некотором  $\varepsilon > 0$  он удовлетворяет соотношениям

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) = 0, \quad \|x - x^0\| \leq \varepsilon.$$

Элементарным (по своей идее) методом решения задачи (1) является *метод исключения*. Из уравнений  $g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$  исключаются  $m$  переменных, допустим, первые  $x_1 = h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = h_m(x_{m+1}, \dots, x_n)$ . Эти значения подставляются в целевую функцию. В результате получается задача на безусловный минимум относительно  $n - m$  переменных  $x_{m+1}, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} \varphi(x_{m+1}, \dots, x_n) &= f(h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &\dots, h_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2)$$

которая эквивалентна (проверьте!) задаче (1): а) если  $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$  — решение задачи (1), то  $\{x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\}$  — решение задачи (2); б) если  $\{x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\}$  — решение задачи (2), то  $\{h_1(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0), \dots, h_m(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0), x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\}$  — решение задачи (1).

Для нелинейных функций  $g(x)$  метод исключения, как правило, трудно реализуем, но для большого класса задач с линейными функциями  $g(x) = Ax - b$  он широко используется в современных алгоритмах. В частности, симплекс-метод (гл. I) можно трактовать как реализацию метода исключения.

Второй (классический) метод исследования задач на условный минимум — *метод множителей Лагранжа*. Этот метод предвосхитил современную теорию двойственности (гл. II) и сыграл большую роль при открытии первых соотношений двойственности линейного программирования (гл. I).

По элементам задачи (1) с помощью *обобщенного (расширенного)  $(m+1)$ -вектора Лагранжа*  $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$  (его компоненты:  $\lambda_0$  — скаляр,  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  —  $m$ -вектор Лагранжа;  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — множители Лагранжа) составим обобщенную функцию Лагранжа

$$F(x, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda' g(x). \quad (3)$$

**Теорема 1 (обобщенное правило множителей Лагранжа).** Для каждого локально оптимального плана  $x^0$  задачи (1) существует такой ненулевой обобщенный вектор Лагранжа  $\bar{\lambda}^0 \neq 0$ , что

$$\frac{\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

т. е.  $x^0$  — стационарная точка обобщенной функции Лагранжа (3) при  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0$ .

Изящное доказательство обобщенного правила множителей Лагранжа основано на *теореме о неявной функции*: если  $m$ -вектор-функция  $g(y, z)$ ,  $y \in R_m$ ,  $z \in R_p$ , определена в окрестности точки  $\{a, b\}$ ,  $a \in R_m$ ,  $b \in R_p$ , непрерывно дифференцируема там по  $y$  и удовлетворяет соотношениям

$$g(a, b) = 0, \det \left\{ \frac{\partial g_1(a, b)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial g_m(a, b)}{\partial y} \right\} \neq 0,$$

то найдутся такие число  $\beta_0 > 0$  и непрерывная  $m$ -вектор-функция  $h(z)$ ,  $\|z - b\| \leq \beta_0$ , что 1)  $g(h(z), z) \equiv 0$ ,  $\|z - b\| \leq \beta_0$ ; 2)  $h(b) = a$ ; 3)  $h(z) \in C^{(k)}$ , если  $g(y, z) \in C^{(k)}$ .

Доказательство теоремы 1. При  $m \geq n$  теорема тривиальна. Пусть  $m < n$ . Утверждение (4) согласно (3) имеет вид

$$\lambda_0^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0, \quad \bar{\lambda}^0 \neq 0,$$

и, следовательно, означает, что векторы

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x}, \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x} \quad (5)$$

линейно зависимы. Предположим, что теорема неверна, т. е. векторы (5) линейно независимы. Рассмотрим систему

$$f(x) = f(x^0) + \beta, \quad g(x) = 0, \quad (6)$$

относительно  $n+1$  переменной  $x$ ,  $\beta$ . По теореме о неявной функции она имеет решение  $x(\beta)$ , определенное в окрестности точки  $\beta = 0$ . При  $\beta < 0$  из (6) получаем соотношения

$$f(x(\beta)) < f(x^0), \quad g(x(\beta)) = 0,$$

которые противоречат оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

Вектор  $\bar{\lambda}^0$ , для которого в точке  $x^0$  выполняется равенство (4), назовем *обобщенным вектором Лагранжа*, соответствующим точке  $x^0$ . Точке  $x^0$  может соответствовать несколько обобщенных векторов Лагранжа.

*З а м е ч а н и е.* Поскольку равенству (4) наряду с  $\bar{\lambda}^0$  удовлетворяет вектор  $-\bar{\lambda}^0$ , то знак одной компоненты вектора  $\bar{\lambda}^0$  можно выбрать заранее. Полагают  $\lambda_0 \geq 0$ , что является уточнением обобщенного правила множителей Лагранжа.

При исследовании задач на условный минимум в течение долгого времени (со времен Лагранжа) используется (*классическая*) *функция Лагранжа*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'g(x), \quad (7)$$

которая получается из (3) при  $\lambda_0 = 1$ .

Для функции Лагранжа (7) правило множителей, вообще говоря, неверно.

*Пример 1.*  $f(x_1, x_2) = x_1$ ,  $g(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ . Планы лежат на полукубической параболе  $x_1^3 - x_2^2 = 0$  (рис. III. 2). Ясно, что

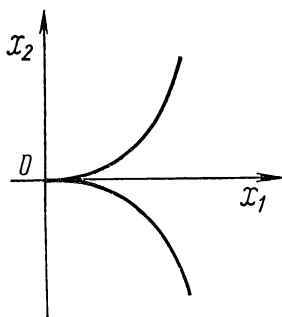


Рис. III.2

$\{x_1^0 = 0, x_2^0 = 0\}$  — оптимальный план. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) = x_1 + \lambda(x_1^3 - x_2^2).$$

Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 3\lambda x_1^2 = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\lambda x_2 = 0.$$

Точка  $x^0 = \{0, 0\}$  не удовлетворяет этим уравнениям ни при каком  $\lambda$ , т. е. правило множителей с классической функцией Лагранжа в данной задаче не справедливо.

**2. Классическое правило множителей Лагранжа.** Выясним, когда при исследовании задачи (1) можно пользоваться функцией Лагранжа (7).

*Определение 3.* Задачу (1) и ее оптимальный план  $x^0$  назовем *нормальными*, если среди обобщенных векторов Лагранжа  $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ , соответствующих плану  $x^0$ , нет такого, что  $\lambda_0 = 0$ .

Поскольку обобщенный вектор Лагранжа из равенства (4) определяется с точностью до постоянного множителя, а в нормальной задаче (1) компонента  $\lambda_0$  положительна, то, разделив на нее вектор  $\bar{\lambda}$ , получим обобщенный вектор Лагранжа вида  $\{1, \lambda\}$ , т. е. обобщенная функция Лагранжа станет классической функцией Лагранжа (7), построенной с помощью (классического) вектора Лагранжа  $\lambda$ .

**Лемма 1.** Нормальному оптимальному плану соответствует единственный вектор Лагранжа.

*Доказательство.* Предположим, что существуют два вектора Лагранжа  $\lambda, \mu, \lambda \neq \mu$ :

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем равенство  $(\lambda - \mu)' \partial g(x^0) / \partial x = 0$ , которое означает, что нормальному оптимальному плану  $x^0$  вопреки определению 3 соответствует обобщенный вектор Лагранжа  $\{0, \lambda - \mu\} \neq 0$ . Лемма доказана.

Оказывается, нормальность оптимального плана  $x^0$  тесно связана с поведением функции ограничения  $g(x)$  в точке  $x^0$ . Предварительно введем

*Определение 4.* План  $x^0$  назовем *обыкновенным*, если на нем линейно независимы векторы

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x}. \quad (9)$$

**Теорема 2.** Оптимальный план  $x^0$  является нормальным тогда и только тогда, когда он обыкновенный.

*Доказательство. Необходимость.* Пусть для нормального оптимального плана  $x^0$  векторы (9) линейно зависимы:  $\lambda' \partial g(x^0) / \partial x = 0, \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \neq 0$ . Тогда  $\bar{\lambda} = \{\lambda_0 = 0, \lambda\}$  — обобщенный вектор Лагранжа, соответствующий плану  $x^0$ . Равенство  $\lambda_0 = 0$  противоречит определению 3.

**Достаточность.** Пусть оптимальный план  $x^0$  — обыкновенный. Если допустить, что он не является нормальным (в этом случае говорят, что он *анормальный*), то для него найдется обобщенный вектор Лагранжа  $\{\lambda_0=0, \lambda\}$ ,  $\lambda \neq 0$ , с которым обобщенное правило множителей принимает вид  $\lambda' \partial g(x^0)/\partial x = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ , означающий, что векторы (9) линейно зависимы. Противоречие доказывает теорему.

**С л е д с т в и е.** Если задача (1) нормальная, то  $m \leq n$ . Сформулируем основной результат.

**Теорема 3 (правило множителей Лагранжа).** Если на оптимальном плане  $x^0$  задачи (1) векторы (9) линейно независимы, то найдется такой (единственный) вектор Лагранжа  $\lambda^0$ , что на паре  $\{x^0, \lambda^0\}$  выполняются равенства (*условия стационарности функции Лагранжа*)

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0. \quad (10)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При условиях теоремы задача (1) — нормальная (теорема 2). Первое равенство — это условие стационарности (4), записанное для функции (7), к которой сводится функция (3) для нормальной задачи (1). Второе равенство имеет вид очевидного равенства  $g(x^0) = 0$ . Теорема доказана.

**Определение 5.** Точку  $x^*$  называют *условно-стационарной*, если существует такой  $m$ -вектор  $\lambda^*$ , что пара  $\{x^*, \lambda^*\}$  — стационарная точка функции Лагранжа (7):

$$\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0, \quad \partial F(x^*, \lambda^*)/\partial \lambda = 0. \quad (11)$$

Поиск условно-стационарных точек сводится к решению системы (11) из  $m+n$  уравнений относительно  $m+n$  неизвестных  $x, \lambda$ .

Таким образом, согласно правилу множителей Лагранжа решение (если оно существует) задачи на условный минимум (1) сводится к перебору значений целевой функции на множестве условно-стационарных точек.

Следует подчеркнуть, что в отличие от выпуклого программирования (гл. II) оптимальные планы не являются, вообще говоря, точками минимума функции Лагранжа (7) при  $\lambda = \lambda^0$ .

**Пример 2.**  $f(x_1, x_2) = x_2$ ,  $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ . Оптимальный план  $x^0 = \{0, 0\}$  — обыкновенный, ибо  $\partial g(0)/\partial x_2 = 1 \neq 0$ . Из условия стационарности (10):  $\partial F/\partial x_1 = -2\lambda x_1 = 0$ ,  $\partial F/\partial x_2 = 1 + \lambda = 0$  най-

дем  $\lambda = -1$  для функции Лагранжа  $F(x, -1) = x_2 + \lambda(x_2 - x_1^2)$ . В точке  $x^0$  функция  $F(x, -1) = x_1^2$  достигает минимума.

Пример 3.  $f(x_1, x_2) = x_2^3$ ,  $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ . Как и в предыдущем примере, задача (1) с этими элементами — нормальная. Условие стационарности (10) для функции Лагранжа  $F(x, \lambda) = x_2^3 + \lambda(x_2 - x_1^2)$  приводит к уравнениям  $-2\lambda x_1 = 0$ ,  $3x_2^2 + \lambda = 0$ ,  $x_2 - x_1^2 = 0$ . Оптимальному плану  $x^0 = \{0, 0\}$  соответствует множитель  $\lambda = 0$ . Точка  $x^0$  — точка перегиба функции  $F(x, 0) = x_2^3$ .

Пример 4.  $f(x_1, x_2) = -x_2^2$ ,  $g(x_1, x_2) = x_2$ . Условие стационарности для функции Лагранжа  $F(x, \lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2$  приводит к уравнениям  $\partial F / \partial x_1 = 0$ ,  $\partial F / \partial x_2 = -2x_2 + \lambda = 0$ , из которых получаем  $\lambda = 0$ . Функция  $F(x, 0) = -x_2^2$  на оптимальном плане  $x^0 = 0$  достигает не минимума, а максимума.

Место нормальных задач (и, следовательно, классического правила множителей Лагранжа) среди задач на условный минимум в силу теоремы 2 (см. также лемму о включении в п. 3) определяется тем, что они составляют основную массу задач и множество их планов (при  $n > m$ ) не может быть конечным. Множество планов аномальных задач может оказаться конечным.

Пример 5.  $f(x_1, x_2) = x_1$ ,  $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Задача имеет единственный план  $x_1 = x_2 = 0$ .

**3. Современная техника получения необходимых условий оптимальности первого порядка для гладких задач на условный минимум.** Задачу (1) называют *гладкой*, если  $f(x)$ ,  $g(x) \in C^{(1)}$ . Приведенные в пп. 1, 2 доказательства необходимых условий минимума первого порядка неконструктивны. С теоретической и прикладной точек зрения представляют интерес приводимые ниже более конструктивные доказательства, которые содержат основные элементы современного подхода к исследованию экстремальных задач. Общие его конструкции будут описаны в § 5.

**Определение 5.** Вектор  $l$  назовем *направлением, допустимым в точке  $x^*$  по ограничению типа равенства  $g_i(x) = 0$  (касательным направлением)*, если  $g_i(x^*) = 0$ ,  $l' \partial g_i(x^*) / \partial x = 0$ .

**Определение 6.** Вектор  $l$  называется *допустимым направлением по ограничениям задачи (1) на плане  $x^*$* , если он является в точке  $x^*$  допустимым направлением по каждому ограничению  $g_i(x) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Определение 7.** Вектор  $l$  называется подходящим направлением (направлением убывания) функции  $f(x)$  в точке  $x^*$ , если  $l' \partial f(x^*) / \partial x < 0$ .

**Определение 8.** Вектор  $l$  называется *подходящим направлением задачи* (1) на плане  $x^*$ , если он в этой точке, будучи допустимым направлением по ограничениям задачи (1), является подходящим направлением ее целевой функции.

**Теорема 4.** Если  $x^0$  — оптимальный обыкновенный план задачи (1),  $m < n$ , то в  $x^0$  не существует подходящих направлений задачи (1), т. е. для любого вектора  $l$ , удовлетворяющего равенствам

$$l' \partial g_i(x^0) / \partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

выполняется неравенство

$$l' \partial f(x^0) / \partial x \geq 0. \quad (12')$$

Доказательство теоремы основано на *лемме о включении*, которая ярко отражает сущность классических методов исследования экстремальных задач.

**Лемма 2 (о включении).** Пусть  $x^*$  — обыкновенный план задачи (1),  $m < n$ . Тогда для любого направления  $l$ , допустимого по ограничениям задачи, существуют такие число  $\beta_0 > 0$  и гладкая  $n$ -вектор-функция  $h(\beta)$  скалярного аргумента  $\beta$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ , что  $h(0) = x^*$ ,  $dh(0) / d\beta = l$  и выполняется тождество  $g(h(\beta)) \equiv 0$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ .

**Доказательство.** Поскольку  $x^*$  — обыкновенный план, то векторы

$$\partial g_1(x^*) / \partial x, \dots, \partial g_m(x^*) / \partial x \quad (13)$$

линейно независимы. Дополним эти векторы до базиса в  $R_n$  векторами

$$\partial g_{m+1}(x^*) / \partial x, \dots, \partial g_n(x^*) / \partial x, \quad (14)$$

построенными по некоторым гладким функциям  $g_{m+1}(x), \dots, g_n(x)$ .

Для произвольного  $n$ -вектора  $l$  из (12) вычислим

$$\gamma_{m+1} = l' \partial g_{m+1}(x^*) / \partial x, \dots, \gamma_n = l' \partial g_n(x^*) / \partial x \quad (15)$$

и рассмотрим систему из  $n$  уравнений относительно  $n+1$  переменных  $x, \beta$ :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 0, \dots, g_m(x) = 0, \\ g_{m+1}(x) &= g_{m+1}(x^*) + \beta \gamma_{m+1}, \dots \\ \dots, g_n(x) &= g_n(x^*) + \beta \gamma_n. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу линейной независимости векторов (13), (14) из теоремы о неявных функциях следует существование гладкого решения  $x = h(\beta)$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$ , системы (16), которое при  $\beta = 0$  совпадает с планом  $x^*$ :

$$h(0) = x^*. \quad (17)$$

Из тождеств

$$g_i(h(\beta)) \equiv 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$g_k(h(\beta)) \equiv g_k(x^*) + \beta \gamma_k, \quad k = \overline{m+1, n}; \quad |\beta| \leq \beta_0,$$

получаем

$$dg_i(h(\beta))/d\beta = [\partial g_i(h(\beta))/\partial x]' \cdot dh(\beta)/d\beta \equiv 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$dg_k(h(\beta))/d\beta = [\partial g_k(h(\beta))/\partial x]' \cdot dh(\beta)/d\beta \equiv \gamma_k, \quad k = \overline{m+1, n}.$$

Отсюда, в частности, следует

$$[\partial g_i(x^*)/\partial x]' dh(0)/d\beta = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (18)$$

$$[\partial g_k(x^*)/\partial x]' dh(0)/d\beta = \gamma_k, \quad k = \overline{m+1, n}.$$

Сравнивая уравнения (12), (15) с уравнениями (18), видим, что векторы  $l$  и  $dh(0)/d\beta$  удовлетворяют одной системе линейных уравнений с неособой матрицей коэффициентов. Поэтому  $dh(0)/d\beta = l$ . С учетом (17) этот результат завершает доказательство леммы.

**З а м е ч а н и е.** Согласно теореме о неявных функциях найденная функция  $h(\beta)$  дифференцируема столько раз, сколько раз дифференцируемы функции  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Поясним геометрический смысл леммы 2. Совокупность уравнений  $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$ ,  $m < n$ , задает в  $R_n$   $(n-m)$ -мерное гладкое многообразие  $M$ . В частности, при  $n-m=2$  это будет поверхность, изображенная на рис. III.3.

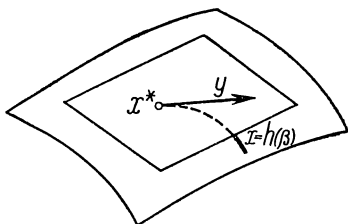


Рис. III.3



Уравнения  $l' \partial g_i(x^*) / \partial x = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , рассматриваемые относительно  $l$ , задают касательную гиперплоскость  $K$  к  $M$  в точке  $x = x^*$ . По лемме о включении какой бы вектор  $y$  ни взять из касательной гиперплоскости  $K$ , на многообразии  $M$  можно провести гладкую линию, которая исходит из точки  $x = x^*$ , с касательной, содержащей вектор  $y$ .

Согласно лемме 2 оптимальный план нормальной задачи можно погрузить в семейство планов, зависящее от параметров  $\beta$ ,  $l$ . Поэтому множество планов нормальной задачи (1),  $m < n$ , не может быть конечным.

**Доказательство** теоремы 4. Предположим, что существует вектор  $l_*$ , на котором выполняются равенства (12), но вместо (12') выполняется неравенство  $l'_* \times \times \partial f(x^0) / \partial x < 0$ . Пусть  $h(\beta)$  — функция, которая построена для вектора  $l_*$  и плана  $x^0$  при доказательстве леммы о включении. Тогда  $\partial f(h(\beta)) / \partial \beta|_{\beta=0} = l'_* \partial f(x^0) / \partial x < 0$ , т. е. при достаточно малом  $\beta > 0$  на плане  $h(\beta)$  выполняется неравенство  $f(h(\beta)) < f(x^0)$ , противоречащее оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

Из теоремы о неравенствах-следствиях (см. п. 4 § 2 гл. I), примененной для системы (12), (12'), следует существование таких чисел  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , что

$$\partial f(x^0) / \partial x + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x^0) / \partial x = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим оставшиеся неисследованными два случая: 1)  $m = n$ , векторы (9) линейно независимы; 2) векторы (9) — линейно зависимы. В первом случае векторы (9) составляют базис пространства  $R_n$  и поэтому найдутся такие числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , что выполняется равенство (19). Второй случай означает, что существуют такие  $\mu_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , что  $\sum_{i=1}^m \mu_i \partial g_i(x^0) / \partial x = 0$ . Положив  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_i = \mu_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , получим

$$\lambda_0 \partial f(x^0) / \partial x + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x^0) / \partial x = 0. \quad (20)$$

В совокупности полученные результаты (19), (20) являются доказательством как обобщенного правила

множителей Лагранжа (теорема 1), так и классического правила множителей Лагранжа (теорема 3). При этом оказывается, что теорема 3 представляет «двойственный» вариант «прямой» теоремы 4 о необходимых условиях оптимальности первого порядка.

Конструктивность приведенного доказательства правила множителей для общего случая (когда  $m < n$  и векторы (9) линейно независимы) состоит в следующем. Если для решения  $l_*$  задачи линейного программирования

$$l' \partial f(x^*) / \partial x \rightarrow \min, \quad l' \partial g_i(x^*) / \partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (21)$$

с некоторым дополнительным (нормировочным) условием (например,  $d_i \leq l_i \leq \beta_i$ ,  $d_i < 0$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) выполняется неравенство  $l'_* \partial f(x^*) / \partial x < 0$ , то найдется такая функция  $o(t)$ , что при движении  $x(t) = x^* + l_* t + o(t)$ ,  $t \geq 0$ , в окрестности точки  $t = 0$  будут выполняться ограничения, а целевая функция будет убывать со скоростью порядка  $|l'_* \partial f(x^*) / \partial x|$ .

В силу отмеченной выше двойственности теоремы 4 и правила множителей Лагранжа при построении направления  $l_*$  можно воспользоваться двойственными методами линейного программирования.

**4. Линейные ограничения.** Рассмотрим важный в приложениях частный случай задачи (1):

$$f(x) \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad (22)$$

когда  $A$  —  $m \times n$ -матрица,  $b$  —  $m$ -вектор,  $f(x) \in C^{(1)}$ .

**Теорема 5.** Если  $x^0$  — оптимальный план задачи (22), то для каждого  $n$ -вектора  $l$ , удовлетворяющего равенству

$$Al = 0, \quad (23)$$

выполняется неравенство

$$l' \partial f(x^0) / \partial x \geq 0. \quad (24)$$

**Доказательство.** Если  $l_*$  — вектор, на котором выполняется равенство (23), но не выполняется неравенство (24) (т. е.  $l'_* \partial f(x^0) / \partial x < 0$ ), то при движении  $x(t) = x^0 + l_* t$ ,  $t \geq 0$ , никогда не будет нарушено ограничение задачи (22) ( $Ax(t) = Ax^0 + Al_* t \equiv b$ ) и  $df(x(t))/dt|_{t=0} = l'_* \partial f(x^0) / \partial x < 0$ . Это противоречит оптимальности плана  $x_0$ . Теорема доказана.

Применяя к (23), (24) теорему о неравенстве-следствии равенств (см. гл. II, § 3), получим классическое правило множителей Лагранжа для задачи (22) без предположения о ее нормальности.

**5. Необходимое условие минимума второго порядка.** Рассмотрим задачу (1), считая, что  $f(x)$ ,  $g_i(x) \in C^{(2)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и что на оптимальном плане  $x^0$  векторы (9) линейно независимы.

**Теорема 6.** Если  $x^0$  — локально оптимальный план нормальной задачи (1),  $\lambda^0$  — соответствующий ему вектор Лагранжа, то неотрицательна квадратичная форма

$$l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l \geq 0 \quad (25)$$

на гиперплоскости, заданной уравнениями

$$l' \partial g_i(x^0)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (26)$$

**Доказательство.** Согласно лемме о включении для каждого вектора  $l$ , удовлетворяющего системе (26), найдутся число  $\beta_0 > 0$  и такая функция  $h(\beta) \in C^{(2)}$ , что  $h(0) = x^0$ ,  $dh(0)/d\beta = l$ ,  $g_i(h(\beta)) \equiv 0$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Из оптимальности плана  $x^0$  следует, что функция  $\alpha(\beta) = f(h(\beta))$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ , при  $\beta = 0$  достигает локального минимума, т. е.  $d\alpha(0)/d\beta = 0$ ,  $d^2\alpha(0)/d\beta^2 \geq 0$ . В подробной записи последнее неравенство имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha(0)}{d\beta^2} &= \frac{d}{d\beta} \left( \frac{d\alpha(\beta)}{d\beta} \right)_{\beta=0} = \frac{d}{d\beta} \left( \frac{\partial f'(\alpha(\beta))}{\partial x} \cdot \frac{dh(\beta)}{d\beta} \right)_{\beta=0} = \\ &= \left[ \frac{dh'(\beta)}{d\beta} \frac{\partial^2 f(h(\beta))}{\partial x^2} \frac{dh(\beta)}{d\beta} + \frac{\partial f'(h(\beta))}{\partial x} \frac{d^2 h(\beta)}{d\beta^2} \right]_{\beta=0} = \\ &= l' \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} l + \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} \frac{d^2 h(0)}{d\beta^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогично из тождества  $\lambda' g(h(\beta)) \equiv 0$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ , следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \lambda^{0'} g(h(\beta))}{d\beta^2} \Big|_{\beta=0} &= l' \frac{\partial^2 \lambda^{0'} g(x^0)}{\partial x^2} l + \frac{\partial [\lambda^{0'} g(x^0)]'}{\partial x} \times \\ &\times \frac{d^2 h(0)}{d\beta^2} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Если сложить неравенство (27) с равенством (28), записать результат в терминах функции Лагранжа и учесть,

что на паре  $\{x^0, \lambda^0\}$  выполняется условие стационарности (10):  $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = 0$ , то получим неравенство (25). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и я.** 1. Для задачи (22) с линейными ограничениями и  $f(x) \in C^{(2)}$  теорема 6 верна без предположения о нормальности оптимального плана. Это следует из того, что в этом случае при доказательстве теоремы 6 лемму 2 можно заменить на лемму 2 из § 2 и учесть, что теорема 3 верна (см. п. 4) без предположения о нормальности.

2. Проверка необходимых условий минимума второго порядка (25), (26) (а также достаточных условий, которые будут рассмотрены в п. 6) при большом числе  $n$  переменных представляет самостоятельную проблему. В связи с этим в теории на условный минимум рассматривается *присоединенная задача на минимум*:

$$\gamma(l) = l'[\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2]l \rightarrow \min, \quad l' \partial g_i(x^0)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Для выполнения необходимого условия минимума второго порядка необходимо и достаточно, чтобы  $\min \gamma(l) \geq 0$ .

3. Условие (25), (26), как и (12), (12'), является прямым. Для (12), (12') с помощью теоремы Фаркаша получено двойственное условие (правило множителей Лагранжа). Что дает подобная схема для (25), (26)?

**6. Достаточное условие локальной оптимальности.** Пусть  $f(x), g(x) \in C^{(2)}$ .

**Теорема 7.** Для локальной оптимальности в задаче (1) условно стационарной точки  $x^*$  достаточно, чтобы при соответствующем ей векторе Лагранжа  $\lambda^*$  была положительна квадратичная форма

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l > 0 \quad (29)$$

на гиперплоскости, заданной уравнениями

$$l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (30)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из (29) следует, что число  $\alpha$  положительно:

$$\alpha = \min l'[\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2]l, \quad \|l\| = 1, \\ l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (31)$$

Введем множество

$$A_\varepsilon = \{x: x = x^* + \varepsilon l, \quad \|l\| = 1, \quad l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i = \overline{1, m}\},$$

лежащее на гиперплоскости (30) в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x^*$ . В силу (31) для точек множества  $A_\varepsilon$  выполняется неравенство

$$(x-x^*)'[\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2](x-x^*) \geq \alpha \varepsilon^2.$$

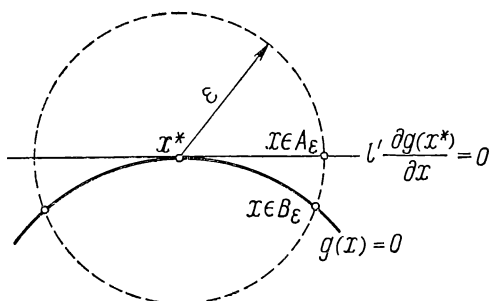


Рис. III.4

Поэтому из формулы Тейлора с учетом условий стационарности точки  $x^*$  следует

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) - F(x^*, \lambda) &= (x-x^*)'[\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2](x-x^*)/2 + \\ &+ o(\|x-x^*\|^2) \geq \alpha \varepsilon^2/2 + o(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon^2[\alpha/2 + o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2] \geq \alpha \varepsilon^2/4 \end{aligned} \quad (32)$$

при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ,  $x \in A_\varepsilon$ .

Рассмотрим множество (рис. III.4)

$$B_\varepsilon = \{x: \|x-x^*\| = \varepsilon, g(x) = 0\}.$$

Поскольку гиперплоскость (30) касательна к многообразию  $g(x) = 0$ , то для каждой точки  $\tilde{x} \in B_\varepsilon$  найдется точка  $x \in A_\varepsilon$  такая, что

$$\|\tilde{x} - x\| \leq K \varepsilon^2. \quad (33)$$

Функция  $\partial F(x, \lambda^*)/\partial x$  непрерывна по  $x$  и  $\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0$ , поэтому

$$\|\partial F(x, \lambda^*)/\partial x\| \leq K_1 \varepsilon, \text{ если } \|x-x^*\| \leq 2\varepsilon. \quad (34)$$

С учетом (33), (34) получаем

$$\begin{aligned} |F(\tilde{x}, \lambda^*) - F(x, \lambda^*)| &\leq \|\partial F(\tilde{x}, \lambda^*)/\partial x\| \|\tilde{x} - x\| \leq \\ &\leq K K_1 \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\tilde{x}$  — некоторая точка из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x$ , а значит, из  $2\varepsilon$ -окрестности точки  $x^*$ .

Теперь для точки  $\tilde{x} \in B_\varepsilon$  из (32) и (35) следует, что

$$F(\tilde{x}, \lambda^*) - F(x^*, \lambda^*) = F(x, \lambda^*) - F(x^*, \lambda^*) + [F(\tilde{x}, \lambda^*) - F(x, \lambda^*)] \geq \varepsilon^2 \cdot \alpha/4 - K K_1 \varepsilon^3 \geq 0,$$

если  $0 < \varepsilon < \alpha/4KK_1$ .

Поскольку на многообразии  $g(x) = 0$  функция  $F(x, \lambda^*)$  совпадает с  $f(x)$ , то из найденной оценки следует неравенство  $f(\tilde{x}) \geq f(x^*)$  для всех  $\tilde{x} \in B_\varepsilon$ ,  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \alpha/4KK_1\}$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Из доказательства теоремы следует, что  $x^*$  — точка *строгого относительного условного минимума*, т. е. найдется такое  $\varepsilon_2 > 0$ , что для всех точек  $x$ ,  $x \neq x^*$ ,  $x \in B_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , выполняется неравенство  $f(x^*) < f(x)$ .

**7. Примеры.** П р и м е р 1. Найти параметры цистерны, которая при заданной площади поверхности  $S_0$  имеет максимальный объем (рис. III.5).

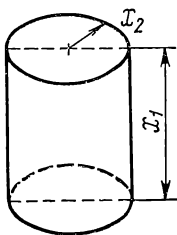


Рис. III.5

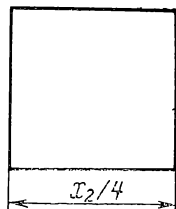
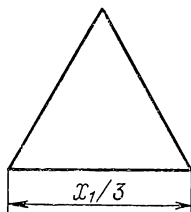


Рис. III.6

Площадь поверхности цистерны равна  $S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2$ . Объем цистерны равен  $V = \pi x_2^2 x_1$ . Введя функции

$$f(x_1, x_2) = -\pi x_1 x_2^2, \quad g(x_1, x_2) = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0,$$

исходную задачу сведем к задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) = 0. \quad (36)$$

Полученная задача не эквивалентна исходной, ибо не учтены дополнительные ограничения

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (37)$$

вытекающие из физической сущности переменных.

Однако будем решать задачу в форме (36), в случае необходимости отбрасывая решения, не удовлетворяющие ограничениям (37). Если задача (36) имеет решение, то искомое, очевидно, будет среди

точек локального минимума задачи (36). Однако без учета (37) задача (36) не имеет решения, ибо  $f(x_1, x_2) \rightarrow -\infty$  при  $x_1 \rightarrow +\infty$ ,  $x_2 \rightarrow -\infty$ . Значит, доказанные необходимые условия минимума нельзя применить.

Обратимся к достаточным условиям оптимальности. Составим функцию Лагранжа  $F(x, \lambda) = -\pi x_1 x_2^2 + \lambda [2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0]$ . Условно-стационарные точки удовлетворяют уравнениям

$$\partial F(x, \lambda)/\partial x_1 = -\pi x_2^2 + 2\pi \lambda x_2 = 0, \quad \partial F/\partial x_2 = -2\pi x_1 x_2 + 4\pi \lambda x_2 + 2\pi \lambda x_1 = 0, \quad 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0 = 0.$$

Отсюда  $x_1 = 4\lambda$ ,  $x_2 = 2\lambda$ ,  $\lambda = \pm \sqrt{S_0/24\pi}$ .

Выбираем  $\lambda^* = \sqrt{S_0/24\pi}$ . Подсчитаем матрицу

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{Bmatrix} 0 & -2\pi x_2 + 2\pi \lambda^* \\ -2\pi x_2 + 2\pi \lambda^* & -2\pi x_1 + 4\pi \lambda^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -2\pi \lambda^* \\ -2\pi \lambda^* & -4\pi \lambda^* \end{Bmatrix}.$$

Уравнение гиперплоскости (30):

$$(\partial g/\partial x_1)y_1 + (\partial g/\partial x_2)y_2 = 2\pi x_2 y_1 + [4\pi x_2 + 2\pi x_1]y_2 = 4\pi \lambda^* y_1 + 16\pi \lambda^* y_2 = 0. \quad (38)$$

Отсюда  $y_1 = -4y_2$ . Квадратичная форма с матрицей  $\partial^2 F/\partial x^2$  имеет вид  $-4\pi \lambda^* y_1 y_2 - 4\pi \lambda^* y_2^2$  и на гиперплоскости (38) переходит в выражение  $12\pi \lambda^* y_2^2$ , которое положительно при  $y_2 \neq 0$ . Таким образом, условия теоремы 7 выполняются для точки  $x_1^* = 2\sqrt{S_0/6\pi}$ ,  $x_2^* = \sqrt{S_0/6\pi}$ . Цистерна с такими параметрами, по крайней мере, среди цистерн с близкими параметрами имеет наибольший объем.

**Пример 2.** Требуется из проволоки заданной длины  $L$  сделать равносторонний треугольник и квадрат, суммарная площадь которых максимальна.

Пусть  $x_1, x_2$  — длины частей проволоки, выделенных на треугольник и квадрат соответственно. Общая площадь фигур (рис. III.6) равна  $S(x_1, x_2) = \sqrt{3}/36 \cdot x_1^2 + 1/16 \cdot x_2^2$ . Полагая  $f(x_1, x_2) = -\sqrt{3}/36 \cdot x_1^2 + x_2^2/16$ ,  $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - L$ , исходную задачу сводим к задаче

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \min, \quad g(x_1, x_2) = 0. \quad (39)$$

Поскольку  $\partial g/\partial x = \{\partial g/\partial x_1, \partial g/\partial x_2\} = \{1, 1\} \neq 0$ , то все планы задачи (39) обыкновенные.

Оставляя пока в стороне вопрос о существовании решения задачи (39), найдем условно-стационарные точки. С помощью функции Лагранжа  $F(x_1, x_2, \lambda) = -\sqrt{3}/36 \cdot x_1^2 + x_2^2/16 + \lambda(x_1 + x_2 - L)$  получим уравнения

$$\partial F/\partial x_1 = -\sqrt{3}/18 \cdot x_1 + \lambda = 0, \quad \partial F/\partial x_2 = x_2/8 + \lambda = 0. \quad (40)$$

Отсюда  $x_1 = 6\sqrt{3}\lambda$ ,  $x_2 = 8\lambda$ . Множитель  $\lambda^*$  найдем из ограничения задачи (39):

$$6\sqrt{3}\lambda + 8\lambda - L = 0, \quad \lambda^* = L/(6\sqrt{3} + 8). \quad (41)$$

Таким образом, точка  $\{x_1^* = 3\sqrt{3}L/(3\sqrt{3} + 4), x_2^* = 4L/(3\sqrt{3} + 4)\}$  — условно-стационарная. Проверим выполнение достаточного условия минимума. Поскольку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/18 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{pmatrix},$$

то квадратичная форма

$$l' [\partial^2 F(x^*, \lambda^*)/\partial x^2] l = -\sqrt{3} l_1^2/18 - l_2^2/8 \quad (42)$$

определенно отрицательна на всем пространстве и, в частности, на любой плоскости. Достаточное условие минимума не выполняется. Следование схеме решения примера 1 здесь не ведет к цели. Ясно, что для функций  $g(x_1, x_2)$ ,  $f(x_1, x_2) = -S(x_1, x_2)$  достаточное условие минимума будет выполняться. Поэтому найденная точка  $\{x_1^*, x_2^*\}$  содержит параметры фигур, суммарная площадь которых минимальна (проволок при этом нужно разделить в отношении  $x_1^*/x_2^* = 3\sqrt{3}/4 \cong \cong 1,3$ ).

Как же быть с исходной задачей? Из проведенных вычислений прежде всего следует, что задача (39) не имеет решения, ибо в противном случае решение  $\{x_1^0, x_2^0\}$  удовлетворяло бы уравнениям (40), (41) и квадратичная форма (42) на нем была знакоположительной. Но на плоскости  $l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , система (40), (41) имеет единственное решение  $\{x_1^*, x_2^*\}$ , на котором форма (42) определенно отрицательна.

Поскольку физически довольно ясно, что в исходной постановке задача минимизации должна иметь решение, постольку полученный вывод указывает на то, что принятая математическая модель (39) не адекватна физической задаче. Действительно, в модели (39) не учтены ограничения  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ , вытекающие из физической постановки задачи. С учетом этих ограничений в следующем параграфе решение примера 2 доводится до конца.

#### § 4. Минимизация функций при ограничениях типа неравенств

Нелинейное программирование, как современный этап развития теории классических задач на максимум и минимум, оформилось во второй половине XX в. в связи с систематическим исследованием экстремальных задач с ограничениями, заданными нелинейными неравенствами. Классические задачи на условный минимум в нелинейном программировании стали называться *задачами минимизации с ограничениями типа равенств*.

1. **Необходимые условия оптимальности первого порядка.** Под задачей минимизации с ограничениями типа неравенств в данном пункте будем понимать задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad (1)$$



в которой целевая функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , и компоненты  $g_1(x), \dots, g_m(x)$  функции ограничений  $g(x)$  принадлежат классу  $C^{(4)}$ .

План  $x^0$  назовем (глобально) оптимальным (решением задачи (1)), если

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) \leq 0.$$

План  $x^0$  называется локально оптимальным, если при некотором  $\varepsilon > 0$  он удовлетворяет соотношениям

$$f(x^0) = \min f(x), \quad g(x) \leq 0, \quad \|x - x^0\| \leq \varepsilon.$$

Говорят, что на плане  $x^*$  ограничение  $g_i(x^*) \leq 0$  активно (пассивно), если  $g_i(x^*) = 0$  ( $g_i(x^*) < 0$ ). Множество индексов активных ограничений обозначим через  $I_a(x^*) = \{i: g_i(x^*) = 0\}$ .

**Теорема 1.** Если  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (1), то несовместна система неравенств

$$l' \partial f(x^0) / \partial x < 0, \quad (2)$$

$$l' \partial g_i(x^0) / \partial x < 0, \quad i \in I_a(x^0). \quad (3)$$

**Доказательство.** Предположим от противного, что неравенства (2), (3) на векторе  $l_*$  выполняются. Рассмотрим движение  $x(t) = x^0 + l_* t$ ,  $t \geq 0$ . При всех достаточно малых  $t > 0$  на векторе  $x(t)$  будут, очевидно, выполняться ограничения  $g_i(x) \leq 0$ , пассивные на плане  $x^0$ . Для  $i \in I_a(x^0)$  в силу (3) получаем неравенство

$$g_i(x(t)) = g_i(x^0) + t l'_* \partial g_i(x^0) / \partial x + o(t) = t l'_* \partial g_i(x^0) / \partial x + o(t) \leq 0, \quad t \in [0, t_0], \quad t_0 > 0.$$

Таким образом, при всех  $t \in [0, t_0]$  вектор  $x(t)$  является планом задачи (1). Вдоль  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , с учетом (2) имеем  $df(x(t)) / dt|_{t=0} = dx'(t) / dt [\partial f(x(t)) / \partial x]_{t=0} = l'_* \partial f(x^0) / \partial x < 0$ , что противоречит оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

В § 2 гл. I показано, что проверка системы (2), (3) на несовместность эквивалентна задаче линейного программирования. По решению  $l_*$  этой задачи, сформированной для произвольного плана  $x^*$ , можно построить движение  $x(t) = x^* + l_* t$ ,  $t \geq 0$ , улучшающее план  $x^*$ .

Если к неравенствам (2), (3), выражающим прямое

необходимое условие оптимальности, применить теорему о несовместности систем неравенств (§ 2 гл. I), получим двойственное необходимое условие оптимальности.

**Теорема 2 (обобщенное правило множителей Лагранжа).** Для каждого локально оптимального плана  $x^0$  задачи (1) существует такой ненулевой обобщенный вектор Лагранжа  $\bar{\lambda}^0 = \{\lambda_0^0, \lambda^0\}$ , что выполняются условия:

- 1) неотрицательности:  $\bar{\lambda}^0 \geq 0$ ;
- 2) стационарности:  $\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0)/\partial x = 0$ ;
- 3) дополняющей нежесткости:  $g'(x^0)\lambda^0 = 0$ .

Будем говорить, что план  $x^*$  — обыкновенный, если линейно независимы векторы

$$\partial g_i(x^*)/\partial x, \quad i \in I_a(x^*). \quad (4)$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $x^*$  — обыкновенный план, то  $|I_a(x^*)| \leq n$ .

Вектор  $l$  назовем *направлением, допустимым* в точке  $x^*$  по ограничению типа неравенства  $g_i(x) \leq 0$  (внутренним направлением), если  $l' \partial g_i(x^*)/\partial x < 0$  при  $g_i(x^*) = 0$  и  $l$  — произвольный  $n$ -вектор, если  $g_i(x^*) < 0$ .

Вектор  $l$  называют *направлением, допустимым по ограничениям задачи* (1) на плане  $x^*$ , если он является в точке  $x^*$  допустимым направлением по каждому ограничению  $g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}$ .

Таким образом, направления, допустимые по ограничениям задачи (1) на плане  $x^*$ , описываются неравенствами (3), если в них вектор  $x^0$  заменить на  $x^*$ . Они всегда существуют, если  $x^*$  — обыкновенный план.

Понятие подходящего направления задачи (1) сохраняется таким же, как в задаче на условный минимум (§ 3, п. 3). Сохраним и определения функций (обобщенной и классической) Лагранжа.

Из теоремы 1 следует утверждение: если  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (1), то в точке  $x^0$  не существует подходящих направлений задачи (1).

Применив к неравенствам (2), (3) теорему Фаркаша о неравенствах-следствиях, получим двойственное утверждение.

**Теорема 3 (классическое правило множителей Лагранжа).** Для каждого обыкновенного локально оптимального плана  $x^0$  задачи (1) существует единственный вектор Лагранжа  $\lambda^0$ , на котором выполняются условия:

- 1) неотрицательности:  $\lambda^0 \geq 0$ ;

- 2) стационарности:  $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x = 0$ ,  $\partial F(x^0, \lambda^0)/\partial \lambda = 0$ ;  
 3) дополняющей нежесткости:  $g'(x^0)\lambda^0 = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Единственность вектора  $\lambda^0$ , соответствующего оптимальному плану  $x^0$ , есть следствие обыкновенности последнего (см. лемму 1 § 3).

**2. Необходимое условие минимума второго порядка.** Вновь рассмотрим задачу (1), но будем считать, что  $f(x), g(x) \in C^{(2)}$ . Согласно теореме 4 обыкновенному оптимальному плану  $x^0$  задачи (1) соответствует единственный вектор Лагранжа  $\lambda^0$ .

Ограничение  $g_i(x) \leq 0$ , активное на плане  $x^0$ , назовем *жестким (мягким)*, если  $\lambda_i^0 > 0$  ( $\lambda_i^0 = 0$ ). Множество индексов жестких (мягких) ограничений на плане  $x^0$  обозначим через  $I_a^+(x^0) = \{i : g_i(x^0) = 0, \lambda_i^0 > 0\}$  ( $I_a^0(x^0) = \{i : g_i(x^0) = 0, \lambda_i^0 = 0\}$ ).

**Теорема 4.** Пусть  $x^0$  — обыкновенный оптимальный план задачи (1),  $\lambda^0$  — соответствующий ему вектор Лагранжа. Тогда на множестве векторов  $l$ , удовлетворяющих системе

$$l' \partial g_i(x^0)/\partial x = 0, i \in I_a^+(x^0); l' \partial g_i(x^0)/\partial x \leq 0, i \in I_a^0(x^0), \quad (5)$$

неотрицательна квадратичная форма

$$l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l \geq 0.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Допустим, что на векторе  $l_*$  выполняются соотношения (5), но

$$l_*' [\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2] l_* < 0. \quad (6)$$

Обозначим:  $I_a^{0-} = \{i \in I_a^0 : l_*' \partial g_i(x^0)/\partial x < 0\}$ ,  $I_a^{00} = \{i \in I_a^0 : l_*' \partial g_i(x^0)/\partial x = 0\}$ . По лемме о включении (§ 3) построим такую функцию  $h(\beta) \in C^{(2)}$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ ,  $\beta_0 > 0$ , что  $h(0) = x^0$ ,  $dh(0)/d\beta = l_*$ ,  $g_i(h(\beta)) \equiv 0$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ ,  $i \in I_a^+ \cup I_a^{00}$ . По построению, на векторах  $h(\beta)$  выполняется тождество

$$g'(h(\beta))\lambda^0 \equiv 0, |\beta| \leq \beta_0, \quad (7)$$

и ограничения с индексами  $i \in I_a^+(x^0) \cup I_a^{00}$ . Проверим, что будут выполняться и остальные ограничения. Для ограничений  $g_i(x) \leq 0$ , пассивных на плане  $x^0$ , это очевидно, ибо  $g_i(x^0) < 0$ . Для оставшихся ограничений с индек-

сами  $i$ ,  $i \in I_a^{0-}$ , утверждение следует из определения множества  $I_a^{0-}$ :  $g_i(h(\beta)) = g_i(x^0) + \beta l'_* \partial g_i(x^0)/\partial x + o(\beta) < 0$ , если число  $\beta > 0$  достаточно мало. Таким образом, при достаточно малом  $\beta_0 > 0$  все векторы  $h(\beta)$ ,  $|\beta| \leq \beta_0$ , — планы задачи (1). Подсчитаем приращение целевой функции:

$$f(h(\beta)) - f(x^0) = F(h(\beta), \lambda^0) - F(x^0, \lambda^0) - g'(h(\beta)) \lambda^0 + \\ + g'(x^0) \lambda^0 = \beta l'_* \partial F(x^0, \lambda^0)/\partial x + \beta^2 l'_* [\partial^2 F(x^0, \lambda^0)/\partial x^2] l_*/2 + \\ + o(\beta^2). \quad (8)$$

Здесь использовано условие дополняющей нежесткости (теорема 3) и свойство (7). Если еще учесть условие стационарности (теорема 3) и неравенство (6), то при достаточно малом  $\beta > 0$  из (8) получим неравенство  $f(h(\beta)) < f(x^0)$ , которое противоречит оптимальности плана  $x^0$ . Теорема доказана.

**3. Достаточное условие локальной оптимальности.** Пусть в задаче (1) выполнено условие:  $f(x), g(x) \in C^{(2)}$ . План  $x^*$  задачи (1) назовем *условно-стационарным*, если для него найдется такой  $m$ -вектор  $\lambda^*$ , что выполняются соотношения

$$\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0, \quad g'(x^*) \lambda^* = 0, \quad \lambda^* \geq 0.$$

**Теорема 5.** Для локальной оптимальности условно-стационарного плана  $x^*$  задачи (1) достаточно, чтобы неравенство

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} l > 0 \quad (9)$$

выполнялось на каждом векторе  $l \neq 0$ , удовлетворяющем системе

$$l' \partial g_i(x^*)/\partial x = 0, \quad i \in I_a^+(x^*); \quad l' \partial g_i(x^*)/\partial x \leq 0, \quad i \in I_a^0(x^*). \quad (10)$$

**Доказательство.** Допустим, что теорема неверна. Тогда для каждого  $\varepsilon_k > 0$  ( $\varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ) найдется такой план  $x^k \neq x^*$ , что  $f(x^k) < f(x^*)$ ,  $g(x^*) \leq 0$ ,  $\|x^k - x^*\| \leq \varepsilon_k$ . Число  $\beta_k$  и  $n$ -вектор  $l^k$  построим так, чтобы  $x^k = x^* + \beta_k l^k$ ,  $\|l^k\| = 1$ ,  $\beta_k > 0$ . Обозначим через  $l_*$ ,  $\|l_*\| = 1$ , предельный вектор последовательности  $l^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . На плане  $x^k$  выполняются неравенства

$$0 \geq g_i(x^k) = g_i(x^* + \beta_k l^k) = g_i(x^*) + \beta_k l^{k'} \partial g_i(x^*)/\partial x + \\ + \beta_k^2 l^{k'} [\partial^2 g_i(x^*)/\partial x^2] l^k/2 + o(\beta^2), \quad i \in I_a(x^*); \quad (11)$$

$$0 > f(x^k) - f(x^*) = \beta_k l^{k'} \partial f(x^*) / \partial x + \\ + \beta_k^2 l^{k'} [\partial^2 f(x^*) / \partial x^2] l^k / 2 + o(\beta_k^2).$$

Разделив обе части неравенств (11) на  $\beta_k > 0$ , после предельного перехода  $k \rightarrow \infty$  получим

$$0 \geq l'_* \partial g_i(x^*) / \partial x, i \in I_a(x^*); 0 \geq l'_* \partial f(x^*) / \partial x. \quad (12)$$

Если допустить, что при некотором  $i_* \in I_a^+(x^*)$  выполняется неравенство  $l'_* \partial g_{i_*}(x^*) / \partial x < 0$ , то, используя (12), равенство  $\partial F(x^*, \lambda^*) / \partial x = 0$  и  $\lambda_{i_*}^* > 0$ ,  $i \in I_a^+(x^*)$ , получим противоречие:

$$0 \geq l'_* \partial f(x^*) / \partial x = - \sum_{i \in I_a^+(x^*)} \lambda_i^* l'_* \partial g_i(x^*) / \partial x > 0.$$

Таким образом,  $l'_* \partial g_i(x^*) / \partial x \equiv 0$ ,  $i \in I_a^+(x^*)$ . В совокупности с (12) это означает, что ненулевой вектор  $l_*$  удовлетворяет системе (10).

Умножим в (11)  $i$ -е неравенство  $0 \geq g_i(x^k)$  на  $\lambda_i^* \geq 0$  и после этого все неравенства в (11) сложим. В результате все линейные по  $\beta_k$  члены исчезнут в силу условия стационарности  $\partial F(x^*, \lambda^*) / \partial x = 0$ . Обе части полученного неравенства разделим на  $\beta_k^2 / 2 > 0$ . В пределе  $k \rightarrow \infty$  получим неравенство  $0 \geq l'_* [\partial^2 F(x^*, \lambda^*) / \partial x^2] l_*$ , которое выполняется на векторе  $l_*$ , удовлетворяющем системе (10), и противоречит неравенству (9). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Доказано несколько более сильное утверждение, чем то, что содержится в теореме: план  $x^*$  — строго локально оптимальный: существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x$  таких, что  $g(x) \leq 0$ ,  $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$ ,  $x \neq x^*$ .

**4. Линейные ограничения.** В качестве упражнения предлагается доказать, что правило множителей Лагранжа (теорема 3) и необходимое условие оптимальности второго порядка (теорема 4) справедливы без предположения об обыкновенности плана  $x^0$ , если в задаче (1) ограничения линейны, т. е.  $g(x) = Ax - b$ ,  $A$  —  $m \times n$ -матрица,  $b$  —  $m$ -вектор.

Если объединить результаты § 3, 4, то получим необходимые и достаточные условия оптимальности в следующей задаче нелинейного программирования с ограничениями типа равенств и неравенств:

$$f(x) \rightarrow \min, g_i(x) = 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) \leq 0, j = \overline{m+1, p}.$$

5. **Пример.** Продолжим решение примера 2 из § 3. В уточненной формулировке задача сводится к следующей:

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \min, \quad g(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (13)$$

где  $f(x_1, x_2) = -x_1^2 \sqrt{3}/36 - x_2^2/16$ ,  $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - l$ . Если ввести функции  $g_1(x) = g(x_1, x_2)$ ,  $g_2(x) = -x_1$ ,  $g_3(x) = -x_2$ ,  $x = \{x_1, x_2\}$ , то задача (13) принимает вид

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_1(x) = 0, \quad g_2(x) \leq 0, \quad g_3(x) \leq 0. \quad (14)$$

Множество планов задачи (13) компактно, а функция  $f(x_1, x_2)$  непрерывна. Поэтому задача (14) имеет решение. Поскольку векторы

$$\partial g_1 / \partial x = \{1, 1\}, \quad \partial g_2 / \partial x = \{-1, 0\}, \quad \partial g_3 / \partial x = \{0, -1\}$$

попарно линейно независимы, а активными могут быть лишь два ограничения: или  $g_1(x) = 0$ ,  $g_2(x) = 0$ , или  $g_1(x) = 0$ ,  $g_3(x) = 0$ , то каждый план является обыкновенным. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = -\sqrt{3}x_1^2/36 - x_2^2/16 + \lambda_1(x_1 + x_2 - l) - \lambda_2x_1 - \lambda_3x_2.$$

Правило множителей приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \partial F(x, \lambda) / \partial x_1 &= -x_1 \sqrt{3}/18 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \quad \partial F(x, \lambda) / \partial x_2 = \\ &= -x_2/8 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0; \quad \lambda_2 g_2(x) = -\lambda_2 x_1 = 0; \\ \lambda_3 g_3(x) &= -\lambda_3 x_2 = 0, \quad g_1(x) = x_1 + x_2 - l = 0; \\ \lambda_2 &\geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Исключив переменные  $x_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , приходим к двум уравнениям  $(\lambda_1 - x_1 \sqrt{3}/18)x_1 = 0$ ;  $(\lambda_1 - l/8 + x_1/8)(l - x_1) = 0$ , которые дают три условно-стационарных плана:

- 1)  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = l$ ,  $\lambda_1^* = l/8$ ,  $\lambda_2^* = l/8$ ,  $\lambda_3^* = 0$ ;
- 2)  $x_1^* = l$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $\lambda_1^* = l\sqrt{3}/18$ ,  $\lambda_2^* = 0$ ,  $\lambda_3^* = l\sqrt{3}/18$ ;
- 3)  $x_1^* = 9l/(9 + 4\sqrt{3})$ ,  $x_2^* = 4l\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ ,  
 $\lambda_1^* = l\sqrt{3}/(18 + 8\sqrt{3})$ ,  $\lambda_2^* = \lambda_3^* = 0$ .

Квадратичная форма, соответствующая задаче, имеет вид

$$l' [\partial^2 F / \partial x^2] l = -l_1^2 \sqrt{3}/18 - l_2^2/8. \quad (15)$$

Составим соотношения (10) для каждой условно-стационарной точки. Для первого плана (третье ограничение пассивно):  $l' \partial g_1(x^*) / \partial x = -l_1 + l_2 = 0$ ,  $l' \partial g_2(x^*) / \partial x = -l_1 = 0$ . Отсюда  $l_1 = l_2 = 0$ . Для второго плана (пассивно второе ограничение):  $l' \partial g_1(x^*) / \partial x = l_1 + l_2 = 0$ ,  $l' \partial g_3(x^*) / \partial x = -l_2 = 0$ . Отсюда  $l_1 = l_2 = 0$ . Для третьего плана (пассивны второе и третье ограничения):  $l' \partial g_1(x^*) / \partial x = l_1 + l_2 = 0$ . Отсюда  $l_1 = -l_2$ .

На третьем условно-стационарном плане квадратичная форма (15) определенно отрицательна. Поэтому согласно теореме 4 этот

план не может быть решением задачи. Решением является один из первых двух планов. Первые два плана удовлетворяют теореме 4, но на них не выполняется достаточное условие оптимальности (теорема 5). Решение задачи найдем сравнением значений функции  $f(x)$ . На первом плане  $f(x^*) = -l^2/16$ , на втором  $-f(x^*) = -\sqrt{3}l^2/36$ , т. е.  $\{x_1^* = 0, x_2^* = l\}$  — глобально оптимальный план. Таким образом, максимальная площадь  $l^2/16$  получается, когда из всей проволоки сделан лишь один квадрат.

**З а м е ч а н и е.** Пример приведен лишь для иллюстрации общих методов. Его решение легко получается методом исключения одной переменной из ограничения типа равенства с последующим анализом целевой функции на отрезке.

## § 5. Негладкие задачи

Задачи нелинейного программирования, сформулированные в терминах достаточно гладких функций, удобны для применения мощных, хорошо развитых классических аналитических методов. В последние годы в нелинейном программировании в связи с запросами практики стала развиваться *теория негладких задач оптимизации*, элементы которой излагаются в данном параграфе.

**1. Минимизация функций, дифференцируемых по направлениям.** Говорят, что функция  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , имеет в точке  $x$  *производную*  $\partial f(x)/\partial l$  по направлению  $l$ ,  $l \in R_n$ , если существует (конечный) предел

$$\partial f(x)/\partial l = \lim [f(x + \varepsilon l) - f(x)]/\varepsilon, \quad \varepsilon \downarrow 0. \quad (1)$$

В случае, когда выписанный выше предел существует для любого  $l \in R_n$ , то определена (при фиксированном  $x$ ) функция  $l \rightarrow \partial f(x)/\partial l$ , которая называется *производной функции*  $f(x)$  в точке  $x$  *по направлениям*. Последняя функция является, очевидно, положительно однородной: если  $l_1 = \alpha l_2$ ,  $\alpha > 0$ , то  $\partial f(x)/\partial l_1 = \alpha \partial f(x)/\partial l_2$ . Отметим, что производная по направлениям может быть разрывной. Однако можно показать, что если функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $x$ , то  $\partial f(x)/\partial l$  как функция  $l$  непрерывна и также удовлетворяет условию Липшица. Указанное свойство имеет место, например, если  $f(x)$  — выпуклая функция.

Класс функций, дифференцируемых по направлениям, значительно шире класса дифференцируемых функций. Он содержит, например, класс выпуклых функций (гл. II).

Рассмотрим функции (рис. III.7)

$$f(x) = \max f_i(x), \quad 1 \leq i \leq m \quad (x \in R_n), \quad (2)$$

$$g(x) = \min g_i(x), \quad 1 \leq i \leq m \quad (x \in R_n). \quad (3)$$

Если функции  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , непрерывны, то непрерывны и функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ . Действительно, пусть  $x^*$  —

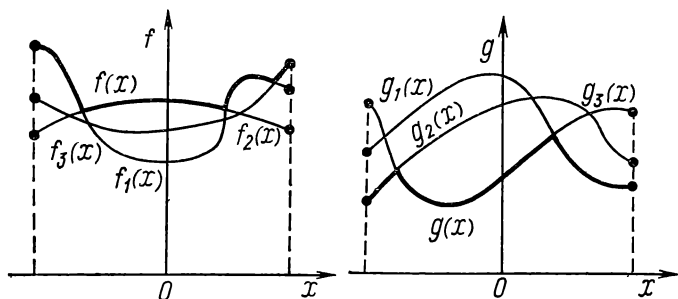


Рис. III.7

произвольная точка в  $R_n$ . В силу непрерывности функций  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , по любому  $\varepsilon > 0$  найдутся такие числа  $\delta_i > 0$ ,  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , что

$$|f_i(x^*) - f_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{если } \|x^* - x\| \leq \delta_i,$$

$$|g_i(x^*) - g_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{если } \|x^* - x\| \leq \Delta_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть  $\delta = \min \delta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $\Delta = \min \Delta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда

$$\max_{1 \leq i \leq m} |f_i(x^*) - f_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{если } \|x^* - x\| \leq \delta, \quad (4)$$

$$\max_{1 \leq i \leq m} |g_i(x^*) - g_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{если } \|x^* - x\| \leq \Delta. \quad (5)$$

С помощью очевидного неравенства

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x^*) + f_i(x)\} \leq \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^*) + \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$$

получаем

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^*) &= \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x) + (f_i(x^*) - f_i(x))\} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x) + \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x^*) - f_i(x)\}. \end{aligned}$$



Аналогично:

$$\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x) \leq \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^*) + \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x) - f_i(x^*)\}.$$

Из двух последних неравенств вытекает следующее:

$$|\max_{1 \leq i \leq m} f_i(x^*) - \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |f_i(x^*) - f_i(x)|.$$

Поскольку  $\min_{1 \leq i \leq m} g_i(x) = -\max_{1 \leq i \leq m} (-g_i(x))$ , то

$$|\min_{1 \leq i \leq m} g_i(x^*) - \min_{1 \leq i \leq m} g_i(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |g_i(x^*) - g_i(x)|.$$

Таким образом, с учетом (4), (5) получаем  $|f(x^*) - f(x)| \leq \varepsilon$ , если  $\|x^* - x\| \leq \delta$ ,  $|g(x^*) - g(x)| \leq \varepsilon$ , если  $\|x^* - x\| \leq \Delta$ , что доказывает непрерывность функций  $f(x)$ ,  $g(x)$ .

Как показывают примеры  $f(x) = \max\{x, -x\} = |x|$ ,  $g(x) = \min\{x, -x\} = -|x|$ ,  $x \in R_1$ , функции (2), (3) могут оказаться недифференцируемыми при сколь угодно гладких функциях  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Пусть  $f_i(x) \in C^{(1)}$ ,  $g_i(x) \in C^{(1)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Покажем, что функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  дифференцируемы по направлениям.

Обозначим через  $I(x)$  совокупность всех индексов  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  таких, что  $f_k(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1, m}\}$ . Тогда  $\alpha = f(x) - \max\{f_i(x), i \in I(x)\} > 0$ . В силу непрерывности функций  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , существует такое положительное число  $\varepsilon^*$ , что для всех  $y$  из  $\varepsilon^*$ -окрестности точки  $x$  выполняются неравенства:  $f_k(y) \geq f(x) - \alpha/2$ ,  $k \in I(x)$ ;  $f_i(y) \leq f(x) - \alpha/2$ ,  $i \in \overline{I(x)}$ . Вычитая второе неравенство из первого, получаем, что  $f_k(y) \geq f_i(y)$  для любых  $k \in I(x)$ ,  $i \in \overline{I(x)}$ ,  $\|x - y\| \leq \varepsilon^*$ . Таким образом, справедливо следующее свойство:

$$f(y) = \max\{f_i(y), i = \overline{1, m}\} = \max\{f_i(y), i \in I(x)\}, \\ \|x - y\| \leq \varepsilon^*. \quad (6)$$

Пусть  $l$  — произвольный вектор в  $R_n$ . Воспользовавшись равенством (6), при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  получаем

$$[f(x + \varepsilon l) - f(x)]/\varepsilon = [\max\{f_i(x + \varepsilon l), i = \overline{1, m}\} - \max\{f_i(x), \\ i = \overline{1, m}\}]/\varepsilon = \max\{f_i(x + \varepsilon l) - f_i(x), i \in I(x)\}/\varepsilon.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\partial f(x)/\partial l &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \max \{ [f_i(x + \varepsilon l) - f_i(x)]/\varepsilon, i \in I(x) \} = \\ &= \max \{ \partial f_i(x)/\partial l, i \in I(x) \}.\end{aligned}$$

Аналогичная формула для  $\partial g(x)/\partial l$  вытекает из представления  $\min \{g_i(x), i = \overline{1, m}\} = -\max \{-g_i(x), i = \overline{1, m}\}$ .

Рассмотрим задачу на безусловный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R_n.$$

Будем считать, что в точке  $x^0$  функция  $f(x)$  дифференцируема по направлениям.

**Теорема 1.** Неравенство

$$\partial f(x^0)/\partial l \geq 0 \quad \forall l \in R_n$$

необходимо, а в случае выпуклой функции  $f(x)$  и достаточно для оптимальности плана  $x^0$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $\partial f(x^0)/\partial l_* < 0$  для некоторого вектора  $l_* \in R_n$ . Тогда, по определению (1) производной по направлению, существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $[f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon < 0$  при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Таким образом, в любой окрестности плана  $x^0$  можно указать такой план  $x_\varepsilon = x^0 + \varepsilon l_*$ , что  $f(x_\varepsilon) < f(x^0)$ , т. е. план  $x^0$  — не оптимальный.

Пусть  $f(x)$  — выпуклая функция. Предположим, что существует план  $x^*$  такой, что  $f(x^*) < f(x^0)$ . Обозначим:  $l_* = x^* - x^0$ . Тогда получим противоречие:

$$\begin{aligned}\partial f(x^0)/\partial l_* &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [f(\varepsilon x^* + \\ &+ (1 - \varepsilon)x^0) - f(x^0)] \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\varepsilon f(x^*) + (1 - \varepsilon)f(x^0) - \\ &- f(x^0)]/\varepsilon = f(x^*) - f(x^0) < 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки  $x^0$ . Если

$$\partial f(x^0)/\partial l > 0 \quad \forall l, \|l\| = 1,$$

то  $x^0$  — локально оптимальный план.

**Доказательство.** Предположим, что план  $x^0$  не является локально оптимальным. Тогда существует по-

последовательность  $x_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , сходящаяся к  $x^0$ , такая, что  $f(x_k) < f(x^0)$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Положим  $\varepsilon_k = \|x_k - x^0\|$ ,  $l_k = (x_k - x^0)/\varepsilon_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ . В силу компактности единичной сферы в  $R_n$  из последовательности  $\{l_k\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не меняя обозначений, будем считать, что  $l_k \rightarrow l$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\|l\|=1$ . По определению производной по направлению, имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)]/\varepsilon_k = \partial f(x^0)/\partial l > 0$ . С другой стороны, при достаточно большом  $k$ :

$$\begin{aligned} [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)]/\varepsilon_k &= [f(x^0 + \varepsilon_k l_k) - f(x^0)]/\varepsilon_k + \\ &+ [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0 + \varepsilon_k l_k)]/\varepsilon_k \leq \\ &\leq [f(x_k) - f(x^0)]/\varepsilon_k + C\|l - l_k\|, \end{aligned}$$

где  $C$  — константа Липшица функции  $f(x)$ . Отсюда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} [f(x^0 + \varepsilon_k l) - f(x^0)]/\varepsilon_k \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} [f(x_k) - f(x^0)]/\varepsilon_k \leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассмотрим теперь задачу минимизации с ограничениями типа неравенств:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Будем считать, что в точке  $x^0$  функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , дифференцируемы по направлениям. Обозначим через  $I(x^0)$  совокупность индексов  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ограничений, активных в точке  $x^0$ , т. е. таких, что  $g_i(x^0) = 0$ . Вектор  $l \in R_n$  назовем *допустимым* в точке  $x^0$  *направлением* по  $i$ -му ( $i \in I(x^0)$ ) *ограничению* задачи (7), если  $\partial g_i(x^0)/\partial l < 0$ . Совокупность направлений, допустимых в  $x^0$  по всем активным ограничениям задачи (7), обозначим через  $K_g(x^0)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $K_g(x^0) \neq \emptyset$ . Неравенство

$$\partial f(x^0)/\partial l \geq 0 \quad \forall l \in K_g(x^0) \quad (8)$$

необходимо, а в случае выпуклых функций  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , и достаточно для оптимальности плана  $x^0$ .

**Доказательство.** Предположим, что найдется такой вектор  $l_* \in K_g(x^0)$ , что  $\partial f(x^0)/\partial l_* < 0$ . Поскольку  $l_* \in K_g(x^0)$ , то  $\partial g_i(x^0)/\partial l_* < 0$ ,  $i \in I(x^0)$ . По определению

производной по направлению, можно указать такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что

$$[f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon < 0; [g_i(x^0 + \varepsilon l_*) - g_i(x^0)]/\varepsilon < 0, \\ i \in I(x^0),$$

для всех  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ . Отсюда, учитывая, что  $g_i(x^0) = 0$ ,  $i \in I(x^0)$ , получаем

$$f(x^0 + \varepsilon l_*) < f(x^0), g_i(x^0 + \varepsilon l_*) < 0, i \in I(x^0), 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Поскольку  $g_i(x^0) < 0$ ,  $i \in \overline{I(x^0)}$ , то из непрерывности функций  $g_i(x)$ ,  $i \in \overline{I(x^0)}$ , следует существование такого числа  $\varepsilon_1 > 0$ , что  $g_i(x^0 + \varepsilon l_*) < 0$ ,  $i \in \overline{I(x^0)}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ . Положив  $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ , получаем неравенства

$$f(x^0 + \varepsilon l_*) < f(x^0), g_i(x^0 + \varepsilon l_*) < 0, i = \overline{1, m}, 0 < \varepsilon < \varepsilon^*,$$

противоречащие оптимальности плана  $x^0$ .

Пусть  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , — выпуклые функции. Предположим, что существует такой план  $x^*$ , что  $g_i(x^*) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $f(x^*) < f(x^0)$ . Положим  $l_* = x^* - x^0$ . Тогда

$$\partial f(x^0)/\partial l_* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [f(x^0 + \varepsilon l_*) - f(x^0)]/\varepsilon \leq f(x^*) - f(x^0) < 0.$$

Аналогично:

$$\partial g_i(x^0)/\partial l_* = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_i(x^0 + \varepsilon l_*)/\varepsilon \leq 0, i \in I(x^0).$$

Поскольку, по предположению,  $K_g(x^0) \neq \emptyset$ , то существует такой вектор  $l_0$ , что  $\partial g_i(x^0)/\partial l_0 < 0$ ,  $i \in I(x^0)$ . Введем вектор  $l_\varepsilon = \varepsilon l_0 + (1 - \varepsilon) l_*$ . В силу выпуклости  $\partial g_i(x^0)/\partial l$  как скалярной функции переменной  $l$  при  $0 < \varepsilon \leq 1$  имеем

$$\partial g_i(x^0)/\partial l_\varepsilon \leq \varepsilon \partial g_i(x^0)/\partial l_0 + (1 - \varepsilon) \partial g_i(x^0)/\partial l_* < 0, i \in I(x^0).$$

Кроме того, в силу непрерывности  $\partial f(x^0)/\partial l$  как функции  $l$  можно указать такое положительное число  $\varepsilon_0$ , что  $\partial f(x^0)/\partial l_\varepsilon < 0$  при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Таким образом, для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  имеем  $l_\varepsilon \in K_g(x^0)$ ,  $\partial f(x^0)/\partial l_\varepsilon < 0$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и я.** 1. Нетрудно показать, что, если в окрестности точки  $x^0$  функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица, то в условиях теоремы неравенство (8) выполняется для всех векторов  $l$ , принадлежащих замыканию  $\overline{K_g(x^0)}$  множества  $K_g(x^0)$ .

2. Предположим, что в окрестности точки  $x^0$  функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , удовлетворяют условию Липшица. Если  $\partial f(x^0)/\partial l > 0$  для всех  $l$  таких, что  $\partial g_i(x^0)/\partial l \leq 0$ ,  $i \in I(x^0)$ , то  $x^0$  — строго локально оптимальный план (докажите!).

## 2. Элементы общей теории экстремальных задач.

В настоящее время в литературе, посвященной выводу необходимых условий оптимальности, наиболее распространенным является подход, связанный с использованием различных локальных аппроксимаций множеств. Сущность этого подхода состоит в следующем. По параметрам задачи и оптимальному плану строится некоторая система множеств, пересечение которых пусто. Вывод необходимых условий разбивается на два этапа. Вначале каждое из множеств аппроксимируется вблизи исследуемой точки некоторым другим множеством более простой структуры (например, конусом) таким образом, чтобы аппроксимации также образовывали непересекающуюся систему. Затем к аппроксимирующим множествам или (если последние не выпуклы) к некоторым их выпуклым подмножествам применяется теорема отделимости выпуклых множеств либо некоторая ее модификация. Существующие схемы вывода условий оптимальности различаются способами построения системы множеств (*в пространстве аргументов, в пространстве образов*), а также типами применяемых аппроксимаций.

Наиболее распространенными локальными аппроксимациями множеств являются так называемые *касательный* и *внутренний* конусы. Пусть  $\Omega \subset R_n$ ,  $x^0 \in \bar{\Omega}$ . Вектор  $z \in R_n$  называется *касательным направлением* к множеству  $\Omega$  в точке  $x^0$ , если для любой окрестности  $U_z$  точки  $z$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие точка  $z_1 \in U_z$  и число  $\varepsilon_1 \in ]0, \varepsilon[$ , что  $x^0 + \varepsilon_1 z_1 \in \Omega$ . Совокупность всех касательных направлений представляет собой непустой замкнутый конус \*) в  $R_n$ , возможно, невыпуклый. Он называется *касательным конусом* к множеству  $\Omega$  в точке  $x^0$  и обозначается  $T(x^0 | \Omega)$ .

*Внутренний конус* к множеству  $\Omega$  в точке  $x^0$  (обозначается  $I(x^0 | \Omega)$ ) определяется как совокупность векторов  $z \in R_n$ , удовлетворяющих следующему условию: существуют такие окрестность  $U_z$  точки  $z$  и число  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $x^0 + \varepsilon z_1 \in \Omega$  для любых  $z_1 \in U_z$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ . Элементы множества  $I(x^0 | \Omega)$  называются *внутренними направлениями*. Ясно, что  $I(x^0 | \Omega)$  — открытый конус, возможно пустой (для того, чтобы  $I(x^0 | \Omega) \neq \emptyset$ , необходимо, чтобы множество  $\Omega$  имело непустую внутренность). При этом

---

\*) Напомним: множество  $K$  называется конусом, если  $\lambda x \in K$  при любых  $\lambda > 0$ ,  $x \in K$ .

всегда  $I(x^0|\Omega) \subset T(x^0|\Omega)$ . Если  $x^0 \in \bar{\Omega}$ , условимся считать, что  $T(x^0|\Omega) = I(x^0|\Omega) = \emptyset$ .

Сформулируем некоторые свойства касательного и внутреннего конусов, являющиеся непосредственными следствиями определений:

1. Если  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , то  $T(x^0|\Omega_1) \subset T(x^0|\Omega_2)$ ,  $I(x^0|\Omega_1) \subset I(x^0|\Omega_2)$ .

2.  $T(x^0|\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset T(x^0|\Omega_1) \cap T(x^0|\Omega_2)$ .

3.  $I(x^0|\Omega_1 \cap \Omega_2) = I(x^0|\Omega_1) \cap I(x^0|\Omega_2)$ .

4.  $T(x^0|\Omega_1 \cap \Omega_2) \supset T(x^0|\Omega_1) \cap I(x^0|\Omega_2)$ .

5.  $R_n \setminus T(x^0|\Omega) = I(x^0|R_n \setminus \Omega)$ .

Из третьего и пятого свойств вытекает, в частности, следующее утверждение, известное как *первая теорема Дубовицкого — Милютина*. Она лежит в основе вывода условий экстремума во многих задачах оптимизации.

**Теорема 4.** Пусть  $x^0 \in \bigcap_{i=0}^m \bar{\Omega}_i$ . Если  $\bigcap_{i=0}^m \Omega_i = \emptyset$ , то

$$\bigcap_{i=1}^m I(x^0|\Omega_i) \cap T(x^0|\Omega_0) = \emptyset.$$

Пусть  $\varphi(x)$  — некоторая функция на  $R_n$ ,  $x^0 \in R_n$ . Будем говорить, что функция  $\varphi(x)$  *равномерно дифференцируема в точке  $x^0$  по направлению  $z$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое положительное число  $\delta$  и такую окрестность  $U_z$  точки  $z$ , что

$$|(\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0))/t - \partial\varphi(x^0)/\partial z| < \varepsilon \quad \forall t \in ]0, \delta[, z_1 \in U_z.$$

Другими словами, функция  $\varphi(x)$  *равномерно дифференцируема в точке  $x^0$  по направлению  $z$* , если существует предел

$$\partial\varphi(x^0)/\partial z = \lim_{t \downarrow 0; z_1 \rightarrow z} (\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0))/t.$$

Следующая теорема содержит представление касательного и внутреннего конусов к множествам уровня функции  $\varphi(x)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\Omega_1 = \{x \in R_n : \varphi(x) < \varphi(x^0)\}$ ,  $\Omega_2 = \{x \in R_n : \varphi(x) \leq \varphi(x^0)\}$ , функция  $\varphi(x)$  *равномерно дифференцируема в точке  $x^0$  по направлениям*. Тогда

$$I(x^0|\Omega_1) \supset \{z \in R_n : \partial\varphi(x^0)/\partial z < 0\}, \quad (9)$$

$$T(x^0|\Omega_2) \subset \{z \in R_n : \partial\varphi(x^0)/\partial z \leq 0\}. \quad (10)$$

Если, кроме того,  $\partial\varphi(x^0)/\partial\bar{z}$  выпукла как функция  $z$  и существует такой вектор  $\bar{z}$ , что  $\partial\varphi(x^0)/\partial\bar{z} < 0$ , то в (9), (10) имеют место равенства.

**Доказательство.** Предположим, что  $\partial\varphi(x^0)/\partial z < 0$ . Тогда, по определению, можно указать такое положительное число  $\delta$  и такую окрестность  $U_z$  точки  $z$ , что  $\varphi(x^0 + tz_1) - \varphi(x^0) < 0$  для всех  $t \in ]0, \delta[$ ,  $z_1 \in U_z$ , т. е.  $z \in I(x^0 | \Omega_1)$ . Аналогично доказывается соотношение (10).

Докажем вторую часть теоремы. Пусть  $z \in I(x^0 | \Omega_1)$ . Тогда существуют такие окрестность  $U_z$  точки  $z$  и число  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $\varphi(x^0 + tz_1) < \varphi(x^0)$  для всех  $t \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $z_1 \in U_z$ . Положим  $z_1 = z + \varepsilon(z - \bar{z})$ . Очевидно, что  $z_1 \in U_z$ , если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало;  $\partial\varphi(x^0)/\partial z_1 \leq 0$ . Имеем  $z = (z_1 + \varepsilon\bar{z})/(1 + \varepsilon)$ . В силу выпуклости  $\partial\varphi(x^0)/\partial z$  как функции  $z$  получаем

$$\partial\varphi(x^0)/\partial z \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \partial\varphi(x^0)/\partial z_1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \partial\varphi(x^0)/\partial\bar{z} < 0,$$

т. е. (9) выполняется как равенство.

Установим теперь обратное включение в (10). Пусть  $\partial\varphi(x^0)/\partial z \leq 0$  и заданы произвольное положительное число  $\varepsilon$  и произвольная окрестность  $U_z$  точки  $z$ . Положим  $z_1 = z + \delta(\bar{z} - z)$ . При достаточно малом  $\delta > 0$  имеем  $z_1 \in U_z$ , причем  $\partial\varphi(x^0)/\partial z_1 < 0$  в силу выпуклости функции  $\partial\varphi(x^0)/\partial z$  по  $z$ . Следовательно, при достаточно малом  $\varepsilon_1 \in ]0, \varepsilon[$  выполняется неравенство  $\varphi(x^0 + \varepsilon_1 z_1) \leq \varphi(x^0)$ , т. е.  $x^0 + \varepsilon_1 z_1 \in \Omega_2$ , что и требовалось доказать.

Доказанная теорема применяется в задачах оптимизации при анализе ограничений типа неравенств. Выясним, что представляет собой касательный конус к множеству, задаваемому с помощью равенств. (Внутренний конус к такому множеству является, очевидно, пустым.)

**Теорема 6.** Пусть  $\Omega = \{x \in R_n: \underline{g_i}(x) = \underline{g_i}(x^0), i = \overline{1, m}\}$ , где функции  $\underline{g_i}(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , непрерывно дифференцируемы в точке  $x^0$ . Тогда

$$T(x^0 | \Omega) \subset \{z \in R_n: \text{grad } \underline{g'_i}(x^0) z = 0, i = \overline{1, m}\}. \quad (11)$$

Если, кроме того, векторы градиентов  $\text{grad } \underline{g_i}(x^0)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , линейно независимы, то в формуле (11) имеет место равенство.

**Доказательство.** Введем функцию  $g(x) = \{\underline{g_1}(x), \underline{g_2}(x), \dots, \underline{g_m}(x)\}$ . Тогда  $\Omega = \{z \in R_n: g(x) = g(x^0)\}$ . Пусть  $z \in T(x^0 | \Omega)$ , т. е. существуют такие по-

следовательности  $\{z_k\} \in R_n$  и  $\varepsilon_k > 0$ , сходящиеся соответственно к  $z$  и к нулю, что  $g(x^0 + \varepsilon_k z_k) = g(x^0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Но  $g(x^0 + \varepsilon_k z_k) - g(x^0) = [\partial g(x^0)/\partial x] z_k + o(\varepsilon_k)$ , откуда следует включение (11).

Предположим теперь, что векторы  $\text{grad } g_i(x^0)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , линейно независимы, т. е. ранг  $m \times n$ -матрицы  $\partial g(x^0)/\partial x$  равен  $m$ , и  $[\partial g(x^0)/\partial x]z = 0$ . Рассмотрим функцию  $\Phi(t, u) = g(x^0 + tz + u' \partial g(x^0)/\partial x) - g(x^0)$ . Очевидно,  $\Phi(0, 0) = 0$ , а  $\partial \Phi(0, 0)/\partial u = [\partial g(x^0)/\partial x]' [\partial g(x^0)/\partial x]$  — невырожденная матрица. По теореме о неявной функции существуют такие положительное число  $\delta$  и  $m$ -вектор-функция  $u(t)$ ,  $t \in ]-\delta, \delta[$ , что  $u(0) = 0$ ;  $\Phi(t, u(t)) \equiv 0$ ,  $t \in ]-\delta, \delta[$ ;  $du(0)/dt = -[\partial \Phi(0, 0)/\partial u]^{-1} \cdot \partial \Phi(0, 0)/\partial t = 0$ . Положим  $z(t) = z + u'(t) [\partial g(x^0)/\partial x]/t$ ,  $t \in ]0, \delta[$ . Имеем  $\lim_{t \downarrow 0} z(t) = z$ . При этом  $g(x^0 + tz(t)) = g(x^0)$ , т. е.  $z \in T(x^0 | \Omega)$ .

Приведенные выше утверждения позволяют свести исследование задач оптимизации к получению условий непересечения некоторой системы конусов. Обычно такие условия формулируются в терминах так называемых *полярных (сопряженных) конусов*.

Пусть  $K$  — конус в пространстве  $R_n$  (с вершиной в нуле). Множество векторов  $x^* \in R_n$  таких, что  $x'x^* \leq 0$  для всех  $x \in K$ , образует непустой выпуклый замкнутый конус. Он называется *полярным* к  $K$  и обозначается  $K^*$ .

**Теорема 7.** Пусть  $K_1, K_2$  — выпуклые конусы. Тогда

$$(K_1 \cap K_2)^* \supset K_1^* + K_2^*. \quad (12)$$

Если, кроме того,  $K_1 \cap K_2^0 \neq \emptyset$ , то в (12) имеет место равенство ( $K^0$  — внутренность конуса  $K$ ).

**Доказательство.** Включение (12) очевидно. Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что  $K_1 \cap K_2^0 \neq \emptyset$ . Пусть  $x^* \in (K_1 \cap K_2)^*$ . Рассмотрим в пространстве  $R_{n+1}$  два множества  $\tilde{K}_1 = \{x, \mu\}: x \in K_1, \mu \geq 0\}$ ,  $\tilde{K}_2 = \{x, \mu\}: x \in K_2, \mu \leq x'x^*\}$ . По предположению,  $K_2^0 = \{x, \mu\}: x \in K_2^0, \mu < x'x^*\} \neq \emptyset$ . При этом  $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2^0 = \emptyset$ . Действительно, если предположить, что  $\{x_1, \mu_1\} \in \tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2^0$ , то получаем  $x_1 \in K_1 \cap K_2$ ,  $x_1'x^* > 0$ , что противоречит предположению  $x^* \in (K_1 \cap K_2)^*$ . Таким образом,  $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2^0 = \emptyset$ .



Следовательно, множества  $\tilde{K}_1$  и  $\tilde{K}_2$  отделимы, т. е. существуют такие вектор  $x_1^*$  и число  $v$ , не равные одновременно нулю, что

$$x'x_1^* + v\mu \leq 0 \quad \forall \{x, \mu\} \in \tilde{K}_1, \quad (13)$$

$$x'x_1^* + v\mu \geq 0 \quad \forall \{x, \mu\} \in \tilde{K}_2 \quad (14)$$

(здесь учитывается, что  $\{0, 0\} \in K_1 \cap K_2$ ). Из (13) вытекает, что  $x'x_1^* \leq 0$  для всех  $x \in K_1$ , т. е.  $x_1^* \in K_1^*$ , и  $v \leq 0$ . При этом  $v \neq 0$ , ибо в противном случае из (14) следовало бы, что  $x'x_1^* \geq 0$  для всех  $x \in K_2$ . Поскольку  $x_1^* \neq 0$ , то последнее означает: конусы  $K_1$  и  $K_2$  отделимы, что противоречит предположению  $K_1 \cap K_2^0 \neq \emptyset$ . Таким образом,  $v < 0$ . Без ограничения общности можно считать, что  $v = -1$ . Из (14) получаем, что  $x'x_1^* - x'x^* \geq 0$  для всех  $x \in K_2$ , т. е.  $x_2^* = x^* - x_1^* \in K_2^*$ . Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой 7, нетрудно убедиться в справедливости второй теоремы Дубовицкого — Милютина, представляющей собой некоторое обобщение теоремы отделимости на случай системы выпуклых конусов.

**Теорема 8.** Пусть  $K_1, K_2, \dots, K_m$  — открытые выпуклые конусы в пространстве  $R_n$ ,  $K_0$  — выпуклый конус.

Для того чтобы  $\bigcap_{i=0}^m K_i = \emptyset$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали такие векторы  $x_i^* \in K_i^*$ ,  $i = \overline{0, m}$ , не равные одновременно нулю, что

$$x_0^* + x_1^* + \dots + x_m^* = 0. \quad (15)$$

Равенство (15) называется *уравнением Эйлера*.

**Доказательство. Необходимость.** Обозначим через  $l$  такой индекс,  $0 < l \leq m$ , что  $\bigcap_{i=0}^{l-1} K_i \neq \emptyset$ , а  $\bigcap_{i=0}^l K_i = \emptyset$ .

Тогда выпуклые конусы  $K_l$  и  $K = \bigcap_{i=0}^{l-1} K_i$  отделимы, т. е. существует такой ненулевой вектор  $x^*$ , что  $x'x^* \leq 0$  для всех  $x \in K$  и  $x'x^* \geq 0$  для всех  $x \in K_l$ . Применяя теорему 7, получаем, что  $x^* = x_0^* + x_1^* + \dots + x_{l-1}^*$ , где  $x_i^* \in K_i^*$ ,  $i = \overline{0, l-1}$ . Полагая  $x_l^* = -x^*$ ,  $x_i^* = 0$ ,  $i = \overline{l+1, m}$ , приходим к уравнению Эйлера (15).

Обратно, пусть выполнено равенство (15) для некоторых  $x_i^* \in K_i^*$ ,  $i = \overline{0, m}$ , причем среди векторов  $x_i^*$ ,  $i = \overline{0, m}$ , хотя бы один отличен от нуля. Обозначим через  $i_0$  индекс  $0 \leq i_0 \leq m$ , соответствующий ненулевому вектору в (15). Тогда  $x'x_{i_0}^* \leq 0$  для всех  $x \in K_{i_0}$  и в силу (15)  $x'x_{i_0}^* \geq 0$  для всех  $x \in K = \bigcap_{i \neq i_0} K_i$ , т. е. вектор  $x_{i_0}^*$  отделяет мно-

жества  $K_{i_0}$  и  $K$ . Последнее означает, что  $K \cap K_{i_0} = \bigcap_{i=0}^m K_i = \emptyset$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Первая и вторая теоремы — прямое и двойственное условия оптимальности.

Приведем примеры сопряженных конусов.

Пусть  $\varphi(x)$  — сублинейный функционал:  $\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$  для любых  $x_1, x_2 \in R_n$  и  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$  для любых  $x \in R_n$ ,  $\lambda \geq 0$ . Рассмотрим множество  $K = \{z \in R_n: \varphi(z) < 0\}$ . Очевидно,  $K$  — открытый выпуклый конус.

**Теорема 9.** Предположим, что  $K \neq \emptyset$ . Тогда

$$K^* = \{\alpha x^*: \alpha \geq 0, z'x^* \leq \varphi(z) \text{ для всех } z \in R_n\}. \quad (16)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $K_1$  множество, стоящее в (16) справа. Пусть  $y^* \in K_1$ . Тогда для любого  $z \in K$  имеем  $z'y^* = \alpha z'x^* \leq \alpha \varphi(z) \leq 0$ , т. е.  $y^* \in K^*$ . Теперь пусть  $y^* \in K^*$ . Очевидно,  $z'y^* \leq 0$  для всех  $z \in \bar{K} = \{z \in R_n: \varphi(z) \leq 0\}$ , т. е.  $y^* \in \bar{K}^*$ . Предположим, что  $y^* \notin K_1$ . Тогда вектор  $y^*$  можно строго отделить от выпуклого замкнутого конуса  $K_1$ , т. е. существует такой вектор  $\bar{z} \in R_n$ , что

$$\alpha \bar{z}'x^* < \bar{z}'y^* \quad (17)$$

при всех  $\alpha \geq 0$  и  $x^* \in R_n$  таких, что  $z'x^* \leq \varphi(z)$ ,  $z \in R_n$ . При  $\alpha = 0$  из (17) получаем неравенство  $\bar{z}'y^* \geq 0$ . Поскольку  $y^* \in \bar{K}^*$ , то для доказательства теоремы теперь достаточно показать, что  $\varphi(\bar{z}) \leq 0$ . Разделив (17) на  $\alpha > 0$  и устремив  $\alpha$  к  $\infty$ , получаем, что  $\bar{z}'x^* \leq 0$  для всех  $x^* \in R_n$  таких, что  $z'x^* \leq \varphi(z)$ ,  $z \in R_n$ . Предположим, что  $\varphi(\bar{z}) > 0$ . Тогда вектор  $\{\bar{z}, 0\} \in R_{n+1}$  не принадлежит выпуклому замкнутому конусу  $M = \{z, \mu\} \in R_{n+1}: \varphi(z) \leq \mu\}$ . По теореме отделимости существует вектор  $\{x_1^*, \beta\} \in R_{n+1}$  такой, что

$$\beta \mu + z'x_1^* < \bar{z}'x_1^* \quad (18)$$

для всех  $\{z, \mu\} \in M$ . При  $z = \bar{z}$  из (18) вытекает, что  $\beta < 0$ .

Не ограничивая общности, будем считать, что  $\beta = -1$ .  
Имеем

$$z'x_1^* < \varphi(z) + \bar{z}'x_1^* \quad (19)$$

при всех  $z \in R_n$ . При  $z = 0$  из (19) следует, что  $\bar{z}'x_1^* > 0$ .  
Пусть  $z \in R_n$ . Тогда при любом  $\alpha > 0$

$$\alpha z'x_1^* < \varphi(\alpha z) + \bar{z}'x_1^*.$$

С учетом того, что  $\varphi(x)$  — сублинейный функционал, из последнего неравенства вытекает, что  $z'x_1^* \leq \varphi(z)$ ,  $z \in R_n$ , и по доказанному выше для вектора  $x_1^*$  должно выполняться неравенство  $\bar{z}'x_1^* \leq 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему.

По аналогии с доказательством теоремы 9 нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 10.** Пусть  $x_i^* \in R_n$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Положим  $K = \{z \in R_n: z'x_i^* = 0, i = \overline{1, m}\}$ . Тогда

$$K^* = \left\{ x^* = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^*, \alpha_i \in R, i = \overline{1, m} \right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$f(x) \rightarrow \min; g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; x \in \Omega. \quad (20)$$

Здесь  $\Omega \subset R_n$ ;  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , — скалярные функции на  $R_n$ . Пусть  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (20). Обозначим:  $\Omega_0 = \Omega$ ;  $\Omega_i = \{x \in R_n: g_i(x) < 0\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

$\Omega_{m+1} = \{x \in R_n: f(x) < f(x^0)\}$ . Тогда, очевидно,  $\bigcap_{i=0}^{m+1} \Omega_i \cap U = \emptyset$ , где  $U$  — некоторая окрестность точки  $x_0$ .

Предположим, что в точке  $x^0$  функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , равномерно дифференцируемы по направлениям. Обозначим через  $I(x^0)$  совокупность индексов  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  таких, что  $g_i(x^0) = 0$ . Поскольку  $I(x^0 | \Omega_i) = R_n$  для  $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x^0)$  и  $I(x^0 | U) = R_n$ , то из теорем 4 и 5 вытекает следующий результат: система (относительно  $z$ )

$$\partial f(x^0)/\partial z < 0; \partial g_i(x^0)/\partial z < 0, i \in I(x^0); z \in T(x^0 | \Omega)$$

несовместна. Сформулированное необходимое условие

оптимальности представляет собой условие непересечения системы конусов. Предположим дополнительно, что производные по направлениям  $\partial f(x^0)/\partial z$ ,  $\partial g_i(x^0)/\partial z$ ,  $i = \overline{1, m}$ , выпуклы как функции  $z$ , а  $T(x^0|\Omega)$  — выпуклый конус.

**Теорема 11.** Пусть  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (20), элементы которой удовлетворяют перечисленным выше предположениям. Тогда существуют такие неотрицательные числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , не равные одновременно нулю, и такие векторы  $x_i^* \in R_n$ ,  $i = \overline{0, m}$ , что

$$z'x_0^* \leq \partial f(x^0)/\partial z,$$

$$z'x_i^* \leq \partial g_i(x^0)/\partial z \text{ для всех } z \in R_n, i = \overline{1, m}; \quad (21)$$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i z'x_i^* \geq 0 \text{ для всех } z \in T(x^0|\Omega); \quad (22)$$

$$\lambda_i g_i(x^0) = 0, i = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Если существует такой вектор  $\bar{z} \in T(x^0|\Omega)$ , что  $\partial g_i(x^0)/\partial \bar{z} < 0$ ,  $i \in I(x^0)$ , то  $\lambda_0 > 0$ .

**Доказательство.** Введем обозначения:  $K_0 = \{z \in R_n : \partial f(x^0)/\partial z < 0\}$ ;  $K_i = \{z \in R_n : \partial g_i(x^0)/\partial z < 0\}$ ,  $i \in I(x^0)$ ;  $K_{m+1} = T(x^0|\Omega)$ . Предположим, что  $K_i \neq \emptyset$ ,  $i \in I(x^0) \cup \{0\}$ . По доказанному выше выписанные множества имеют пустое пересечение. Из теоремы 8 вытекает, что существуют такие векторы  $y_i^* \in K_i^*$ ,  $i \in I(x^0) \cup \{0, m+1\}$ , не равные одновременно нулю, что  $\sum_{i \in I(x^0) \cup \{0, m+1\}} y_i^* = 0$ . В силу теоремы 9  $y_i^* = \lambda_i x_i^*$ , где  $\lambda_i \geq 0$ ,  $z'x_0^* \leq \partial f(x^0)/\partial z$ ,  $z'x_i^* \leq \partial g_i(x^0)/\partial z$  для всех  $z \in R_n$ ,  $i \in I(x^0)$ . С учетом сделанных предположений имеем  $x_i^* \neq 0$ ,  $i \in I(x^0) \cup \{0\}$ . Поэтому среди чисел  $\lambda_i$ ,  $i \in I(x^0) \cup \{0\}$ , необходимо есть отличные от нуля. Поскольку  $y_{m+1}^* \in T^*(x^0|\Omega)$ , то  $\sum_{i \in I(x^0) \cup \{0\}} \lambda_i z'x_i^* \geq 0$  для всех  $z \in T(x^0|\Omega)$ .

При  $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I(x^0)$  положим  $\lambda_i = 0$ , а в качестве  $x_i^*$  выберем любой вектор из  $R_n$  такой, что  $z'x_i^* \leq \partial g_i(x^0)/\partial z$  для всех  $z \in R_n$  (такой вектор заведомо существует в силу выпуклости  $\partial g_i(x^0)/\partial z$  как функции  $z$ ). Таким образом, выполнены условия (21) — (23).

Если при некотором  $i_0 \in I(x^0) \cup \{0\}$  конус  $K_{i_0}$  является

пустым, то положим  $\alpha_{i_0} = 1$ ,  $x_{i_0}^* = 0$ ;  $\alpha_i = 0$ ,  $x_i^*$  — произвольный вектор, удовлетворяющий (21),  $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$ . В этом случае условия (21) — (23) также оказываются выполненными. Первая часть теоремы 11 доказана. Вторая часть легко доказывается рассуждением от противного.

**Теорема 12.** Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда существуют такие неотрицательные числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_0 \partial f(x^0)/\partial z + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x^0)/\partial z \geq 0 \quad (24)$$

для всех  $z \in T(x^0 | \Omega)$  и справедливо условие (23).

Если существует такой вектор  $\bar{z} \in T(x^0 | \Omega)$ , что  $\partial g_i(x^0)/\partial z < 0$ ,  $i \in I(x^0)$ , то  $\lambda_0 > 0$ .

Условие (24) является очевидным следствием условий (21), (22). Можно также показать, что из условия (24) вытекает существование векторов  $x_i^* \in R_n$ ,  $i = \overline{0, m}$ , удовлетворяющих условиям (21), (22). Таким образом, утверждения теорем 11, 12 эквивалентны. Условие (24) (и условие (22)) представляет собой вариант правила множителей Лагранжа. Из него легко выводится классическая теорема Куна — Таккера выпуклого программирования (см. гл. II). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в случае выпуклых множества  $\Omega$  и функции  $\varphi$  имеем  $x - x^0 \in T(x_0 | \Omega)$ , если  $x \in \Omega$ , и  $\partial \varphi(x^0)/\partial z \leq \varphi(x^0 + z) - \varphi(x^0)$  для любого  $z \in R_n$ .

Теоремы 11 и 12 дают общие необходимые условия в задаче нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств. Покажем, как из них можно получить условия экстремума для задач с ограничениями типа равенств. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow \min; \quad g_i(x) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \\ g_i(x) &= 0, \quad i = \overline{m+1, l}. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и ранее, будем предполагать, что в точке  $x^0$  функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , равномерно дифференцируемы по всем направлениям и их производные по направлениям являются выпуклыми функциями. В отношении функций  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , предположим, что они непрерывно дифференцируемы в точке  $x^0$ .

Если обозначить  $\Omega = \{x \in R_n: g_i(x) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$ , то задача (25) принимает вид (20). Пусть  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (25), а градиенты  $\text{grad } g_i(x^0)$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , линейно независимы. Тогда из теоремы 6 вытекает, что касательный конус  $T(x^0 | \Omega)$  совпадает с подпространством  $\{z \in R_n: z' \text{ grad } g_i(x^0) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$ . Теорема 11 утверждает, что существуют такие неотрицательные числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ , не равные одновременно нулю, и такие векторы  $x_i^* \in R_n$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $x^* \in T^*(x^0 | \Omega)$ , что выполнены условия (21), (23) и  $\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + x^* = 0$ . Но по

теореме 10  $x^* = \sum_{i=m+1}^l \lambda_i \text{grad } g_i(x^0)$ , где  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , — некоторые действительные числа. Таким образом, имеем

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \sum_{i=m+1}^l \lambda_i \text{grad } g_i(x^0) = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda_0 \partial f(x^0)/\partial z + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x^0)/\partial z + \sum_{i=m+1}^l \lambda_i z' \text{grad } g_i(x^0) \geq 0$$

$$\forall z \in R_n. \quad (26)$$

Если векторы  $\text{grad } g_i(x^0)$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , линейно зависимы, то существуют такие числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , не равные одновременно нулю, что  $\sum_{i=m+1}^l \lambda_i \text{grad } g_i(x^0) = 0$ . Положив  $\lambda_i = 0$ ,  $i = \overline{0, m}$ , убеждаемся, что и в этом случае выполнено условие (26). Тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема 13.** Пусть  $x^0$  — локально оптимальный план задачи (25), элементы которой удовлетворяют перечисленным выше предположениям. Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{0, l}$ , что  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = \overline{0, m}$ , и выполнены условия (23), (26).

Если векторы  $\text{grad } g_i(x^0)$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , линейно незави-

симы, то  $\sum_{i=0}^m \lambda_i > 0$ . Если, кроме того, существует такой вектор  $\bar{z} \in R_n$ , что  $\partial g_i(x^0)/\partial \bar{z} < 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $z' \text{ grad } g_i(x^0) = 0$ ,  $i = \overline{m+1, l}$ , то  $\lambda_0 > 0$ .

В теории экстремальных задач наряду с описанным выше (в пространстве аргументов) широко используется и метод локальных аппроксимаций в пространстве образов. Вернемся к задаче (20). Пусть  $U$  — окрестность точки  $x^0$ . Введем в пространстве  $R_{m+1}$  множество  $A = \{\{y_0, y_1, \dots, y_m\}: y_0 \geq f(x) - f(x^0), y_i \geq g_i(x), i = \overline{1, m}, \text{ при некотором } x \in \Omega \cap U\}$ . Если  $x^0$  — локально оптимальный план, то существует такая окрестность  $U$  точки  $x^0$ , что  $A \cap K_- = \emptyset$ , где  $K_- = \{y \in R_{m+1}: y_i < 0, i = \overline{0, m}\}$ . При этом точка  $y^0 = \{0, g_1(x^0), \dots, g_m(x^0)\}$  принадлежит множеству  $A$  и замыканию множества  $K_-$ . По теореме 4  $T(y^0|A) \cap I(y^0|K_-) = \emptyset$ .

**Лемма.** Пусть  $y^0 \in \bar{K}_-$ . Тогда

$$I(y^0|K_-) = \{y - \alpha y^0: y \in K_-, \alpha \geq 0\}.$$

**Доказательство.** Пусть  $z \in I(y^0|K_-)$ . Тогда для достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$  имеем  $y^0 + \varepsilon z \in K_-$ , или, поскольку  $K_-$  — конус,  $y = \varepsilon^{-1}y^0 + z \in K_-$ . Отсюда  $z = y - \alpha y^0$ , где  $\alpha = \varepsilon^{-1} > 0$ . Обратно, пусть  $z = y - \alpha y^0$ , где  $y \in K_-$ ,  $\alpha \geq 0$ . Покажем, что  $z \in I(y^0|K_-)$ . Поскольку  $K_-$  — открытый конус, то существует такая окрестность  $U_1$  точки  $y$ , что  $U_1 \subset K_-$ . Очевидно,  $U = U_1 - \alpha y^0$  — окрестность точки  $z$ . Выберем такое положительное число  $\varepsilon_0$ , что  $\varepsilon_0 \alpha < 1$ . Тогда, если  $z_1 \in U$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , то имеем  $y^0 + \varepsilon z_1 = y^0 + \varepsilon y_1 - \varepsilon \alpha y^0 = (1 - \varepsilon \alpha) y^0 + \varepsilon y_1$ , где  $y_1 \in U_1$ . Но  $\varepsilon y_1 \in K_-$ ,  $(1 - \varepsilon \alpha) y^0 \in \bar{K}_-$ . Следовательно,  $y^0 + \varepsilon z_1 \in K_-$ , если  $z_1 \in U$ , т. е.  $z \in I(y^0|K_-)$ .

Если теперь предположить, что функции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , равномерно дифференцируемы в точке  $x^0$  по направлениям, то, как нетрудно убедиться, конус  $T(y^0|A)$  содержит множество  $A_1 = \{y \in R_{m+1}: y_0 \geq \partial f(x^0)/\partial z, y_i \geq \partial g_i(x^0)/\partial z, i = \overline{1, m}, \text{ при некотором } z \in T(x^0|\Omega)\}$ . Если конус  $T(x^0|\Omega)$  выпуклый, а производные по направлениям представляют собой выпуклые функции, то  $A_1$  — выпуклый конус и можно воспользоваться теоремой отделимости. Существует такой ненулевой вектор  $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in R_{m+1}$ , что  $\lambda' y \geq 0$  для всех  $y \in A_1$  и  $\lambda'(y -$

$-\alpha y^0) \leq 0$  для всех  $y \in K_-, \alpha \geq 0$ . Из последнего условия вытекает, что  $\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, m}; \lambda_i g_i(x^0) = 0, i = \overline{1, m}$ . Из первого условия получаем правило множителей

$$\lambda_0 \partial f(x^0)/\partial z + \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(x^0)/\partial z \geq 0$$

для всех  $z \in T(x^0 | \Omega)$ . Таким образом, снова приходим к теореме 12.

Описанная выше техника вывода необходимых условий экстремума применима и в случае, когда функции  $f(x), g_i(x), i = \overline{1, m}$ , не являются дифференцируемыми по направлениям. Условия оптимальности при этом формулируются в терминах так называемых *полупроизводных по направлениям, выпуклых мажорант* и т. п. Однако эти вопросы выходят за рамки данного учебного пособия.

## § 6. Векторная оптимизация

Проблема одновременной минимизации нескольких целевых функций в теории экстремальных задач возникла из достаточно распространенных в приложениях ситуаций, когда выбираемые решения (планы) оцениваются по нескольким показателям. В данном параграфе приводятся начальные сведения из новой области методов оптимизации.

**1. Эффективные планы.** Пусть на заданном множестве планов  $X$  определены  $q$  целевых функций  $f_1(x), \dots, f_q(x)$ , составляющих целевую  $q$ -вектор-функцию  $\hat{f}(x) = \{f_1(x), \dots, f_q(x)\}$ . Впредь план  $x^0$ , доставляющий минимум по одной целевой функции, будем называть *скалярно оптимальным планом*. Задача векторной оптимизации состоит в построении *векторно оптимального плана*  $x^{v0}$ , в основу которого положено стремление достичь минимума заданной системы целевых функций. Ситуация, когда существует план, скалярно оптимальный по каждой целевой функции, исключительна, практически не реализуема, теоретически не интересна и в дальнейшем не рассматривается. Общей является такая ситуация, когда для каждого плана, скалярно оптимального по одной целевой функции, существует вариация, которая приводит к уменьшению значений хотя бы одной из оставшихся целевых функций. Как в этой ситуации дать опре-



деление векторно оптимального плана? Информации об элементах задачи векторной оптимизации, которая приведена выше, вообще говоря, не достаточно для ответа на этот вопрос.

Понятно, что при рассмотрении любой задачи оптимизации необходимо, чтобы множество планов  $X$  было непустым. Понятно также и то, что проблема оптимизации

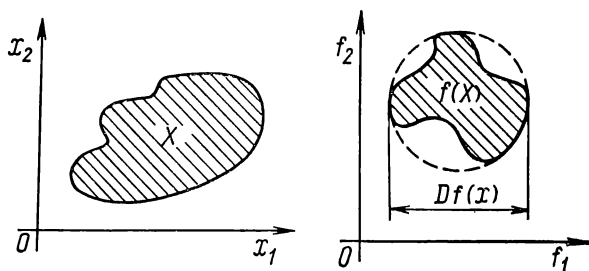


Рис. III.8

может возникнуть лишь в том случае, если диаметр  $Df(X)$  множества  $f(X)$  больше заданного числа  $\varepsilon \geq 0$ , которое характеризует степень приближения к предельно возможному результату. Если  $Df(X) \leq \varepsilon$ , то любой план  $x \in X$  доставляет удовлетворительное значение целевым функциям и проблемы выбора не существует. Проблема выбора оптимального плана возникает только при  $Df(X) > \varepsilon$ , ибо от выбора  $x \in X$  существенно зависит результат: на одних планах целевые функции (часть или все) принимают значения, близкие к минимально возможным, на других — эти значения далеки от минимальных (рис. III.8).

В скалярном случае  $q=1$  оптимальным называется такой план  $x^0$ , для которого не существует другого плана  $x \in X$ ,  $f(x) \neq f(x^0)$ , удовлетворяющего неравенству  $f(x) \leq f(x^0)$ . По аналогии с этим в векторном случае введем понятие *эффективного плана*  $x^0$ , как такого плана, для которого не существует ни одного плана  $x$ ,  $f(x) \neq f(x^0)$ , удовлетворяющего векторному неравенству

$$f(x) \leq f(x^0). \quad (1)$$

Место эффективных планов среди всего множества  $X$  при  $q=2$  можно наглядно представить по рис. III.9, где

множество  $f(X^0)$ , соответствующее множеству  $X^0$  эффективных планов, выделено жирной линией.

В скалярном случае неравенство (1) выделяет среди  $X$  такое подмножество  $X^0$ , что  $Df(X^0) = 0$ . При  $q \geq 2$  происходит принципиальное изменение: на  $X^0$  выполняется неравенство  $Df(X^0) \geq 0$ .

Задачу векторной оптимизации назовем *определен-*

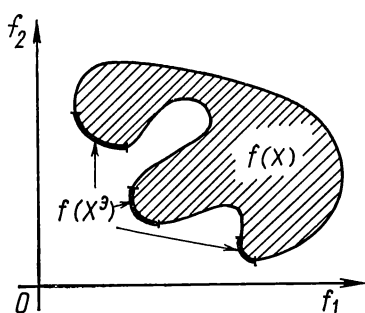


Рис. III.9

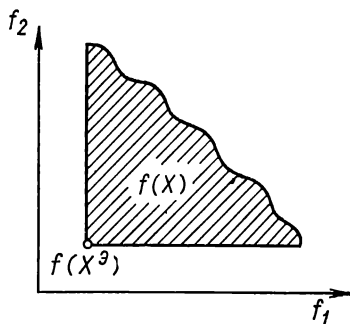


Рис. III.10

ной, если для заданного  $\varepsilon > 0$  имеет место неравенство  $Df(X^0) \leq \varepsilon$ . При этом элементы множества  $X^0$  назовем *решениями задачи*, т. е. *векторно оптимальными планами*  $x^{v0}$ . Если  $Df(X^0) = 0$ , то задачу векторной оптимизации будем называть *вполне определенной*. Подобные задачи составляют тот исключительный класс задач, о которых говорилось выше и которые здесь не исследуются. Им при  $q=2$  соответствует картина, изображенная на рис. III.10. Общей в теории векторной оптимизации является ситуация, когда в приведенной выше постановке *задача не определена*, т. е.  $Df(X^0) > \varepsilon$ .

В этом случае начальная проблема выбора на множестве  $X$  переходит в проблему выбора на множестве  $X^0$ , поскольку справедлива

**Теорема.** Независимо от определения, каждое решение  $x^{v0}$  задачи векторной оптимизации является эффективным планом.

**Доказательство.** Предположим, что это не так: существует векторно оптимальный план  $x^{v0}$ , не принадлежащий множеству  $X^0$ . Тогда найдутся такие план  $x^*$  и целевая функция  $f_{i_*}(x)$ , что  $f_{i_*}(x^*) \leq f_{i_*}(x^{v0})$ ,  $i = \overline{1, q}$ , причем  $f_{i_*}(x^*) < f_{i_*}(x^{v0})$ . Это означает, что по всем целевым

функциям  $f_i(x)$ ,  $i \neq i_*$ , план  $x^*$  не хуже, чем  $x^{v0}$ , но строго лучше по целевой функции  $f_{i_*}(x)$ . Поэтому план  $x^*$  предпочтительнее плана  $x^{v0}$ , какой бы смысл не вкладывать в понятие «векторно оптимальный план». Противоречие доказывает теорему.

В задачах векторной оптимизации эффективные планы выступают, таким образом, как «полуоптимальные» планы, как промежуточный результат, несколько напоминая по своей роли стационарные точки в скалярных задачах безусловной минимизации. В этой интерпретации приведенной теореме можно поставить в соответствие теоремы о необходимых условиях минимума. Однако между рассматриваемыми двумя группами объектов есть существенная разница. Стационарные точки и элементы, удовлетворяющие другим необходимым условиям минимума, получены исследованием поведения целевой функции в окрестности оптимального плана и в общем случае каждое более тщательное исследование позволяло сузить (уменьшить) множество точек (в частности, стационарных), «подозрительных» на оптимальность. В противоположность этому эффективные планы представляют лишь результат согласования целевых функций на множестве планов и по введенной выше информации об элементах задачи не допускают исключения каких-либо экземпляров. В этом проявляется неопределенность задачи векторной оптимизации. Для уменьшения неопределенности (или, другими словами, числа  $Df(X^0)$ ) в постановку задачи векторной оптимизации необходимо ввести дополнительную информацию.

**2. Принципы выбора.** Совокупность исходной информации вместе с дополнительной информацией, позволяющая сделать задачу векторной оптимизации определенной, называется *принципом выбора*. Будем считать, что каждый принцип выбора сопровождается определенными правилами (процедурой) построения векторно оптимального плана  $x^{v0}$ . Назовем принцип выбора *полным*, если соответствующие ему правила построения  $x^{v0}$  зависят от  $q$  параметров и эта зависимость такова, что 1) при каждом наборе допустимых значений параметров план  $x^{v0}$  является эффективным; 2) каждый эффективный план может быть получен при некотором наборе допустимых значений параметров. Если принцип выбора сводится к минимизации некоторой скалярной функции, то его называют *скаляризуемым*.

Рассмотрим несколько распространенных принципов выбора для выпуклых задач векторной оптимизации, у которых выпукло множество  $f_*(X) = \{y: y \geq f(x) \text{ при всех } x \in X\}$ .

*Усреднение целевых функций.* Пусть в дополнение к исходной информации заданы числа  $\lambda_i > 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,

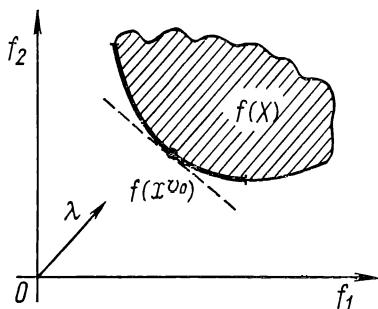


Рис. III.11

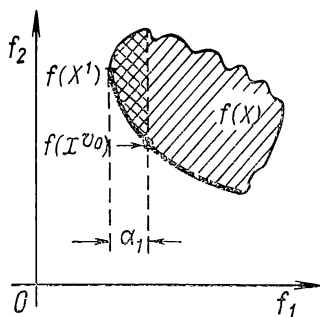


Рис. III.12

$\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1$ . Число  $\lambda_i$  интерпретируется как *мера (степень) важности*  $i$ -й целевой функции. Векторно оптимальным считается такой план  $x^{v0}$ , что

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i f_i(x^{v0}) = \min \sum_{i=1}^q \lambda_i f_i(x), \quad x \in X.$$

В этом принципе выбора векторная целевая функция  $f(x)$  заменена на скалярную  $\lambda'f(x)$ , относительно которой задача становится определенной. Рассматриваемый принцип выбора скаляризуем и почти полный в том смысле, что он позволяет построить почти все элементы  $X^a$ . На рис. III.11 приведена геометрическая иллюстрация.

*Введение иерархии целевых функций.* Пусть целевые функции упорядочены в порядке уменьшения важности:

$$f_{i_1}(x) \succ f_{i_2}(x) \succ \dots \succ f_{i_q}(x)$$

и заданы числа  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,  $i \neq i_q$ .

Векторно оптимальный план  $x^{v0}$  определяется соотношениями

$$f_{i_q}(x^{v0}) = \min_{x \in X_{i_q}} f_{i_q}(x), \quad x \in X_{i_q},$$

$$X_{i_k} = \{x \in X_{i_{k-1}} : f_{i_{k-1}}(x) - \alpha_{i_{k-1}} \leq$$

$$\leq \min_{x \in X_{i_{k-1}}} f_{i_{k-1}}(x), \quad x \in X_{i_{k-1}}\}, \quad k = q, \dots, 2;$$

$$X_{i_1} = \{x \in X : f_{i_1}(x) - \alpha_{i_1} \leq \min_{x \in X} f_{i_1}(x), \quad x \in X\}.$$

Другими словами, сначала строится множество  $X_{i_1} \alpha_{i_1}$ -оптимальных планов по наиболее важной целевой функции (находится минимально возможное значение целевой функции  $f_{i_1}(x)$ ,  $x \in X$ , и делается уступка величиной  $\alpha_{i_1}$ ). Далее рассматривается вторая по важности целевая функция. Процесс заканчивается минимизацией последней по важности целевой функции. Геометрическая иллюстрация для случая  $q=2$ ,  $f_1(x) \prec f_2(x)$ , приведена на рис. III.12.

*Установление гарантированных уровней.* Пусть заданы числа  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,  $i \neq i_*$ , и выбрана целевая функция  $f_{i_*}(x)$ . Решением задачи векторной оптимизации называется такой план  $x^{v0}$ , что

$$f_{i_*}(x^{v0}) = \min_{x \in X} f_{i_*}(x), \quad f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = \overline{1, q}, \quad i \neq i_*, \quad x \in X.$$

Иначе говоря, в этом принципе выбора считается, что по целевым функциям  $f_i(x)$ ,  $i \neq i_*$ , достаточно лишь достижения заданных уровней  $\alpha_i$ ; минимизация существенна только по одной целевой функции  $f_{i_*}(x)$ .

Большинство задач скалярной оптимизации возникают из реальных задач векторной оптимизации в результате применения данного принципа выбора.

*Минимизация расстояния до идеальной точки.* Пусть  $x^{i0}$  — скалярно оптимальный план по  $i$ -й целевой функции. Точку  $f_\alpha = \{f_1(x^{i0}) + \alpha_1, \dots, f_q(x^{i0}) + \alpha_q\}$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , назовем  $\alpha$ -идеальной. Векторно оптимальным считается план  $x^{v0}$ , для которого (рис. III.13)

$$\|f(x^{v0}) - f_\alpha\| = \min_{x \in X} \|f(x) - f_\alpha\|, \quad x \in X.$$

*Пропорциональные уступки.* Пусть  $f_0$  — идеальная точка. В качестве векторно оптимального плана берется такой план  $x^{v0}$ , что (рис. III.14)

$$\frac{f_1(x^{v0}) - f_1(x^{i0})}{f_i(x^{v0}) - f_i(x^{i0})} = \mu_i > 0, \quad i = \overline{2, q}; \quad f_1(x^{v0}) = \min_{x \in X} f_1(x), \quad x \in X.$$

*Условная оптимизация.* В прикладных задачах часто известен план  $x^*$ , достаточно хороший по совокупности

минимизируемых целевых функций. Задача векторной оптимизации в этом случае сводится к построению векторно оптимальных планов  $x^0$ , которые не хуже, чем  $x^*$ , в том смысле, что

$$f_i(x^0) \leq f_i(x^*), \quad i = \overline{1, q}. \quad (2)$$

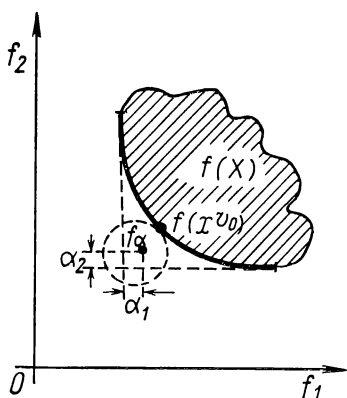


Рис. III.13

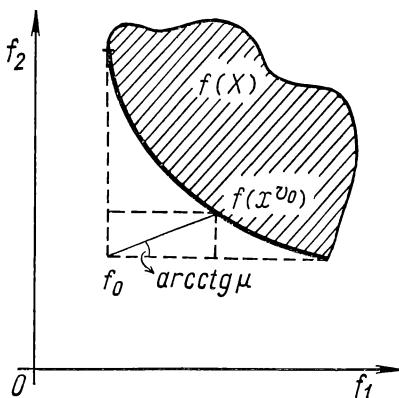


Рис. III.14

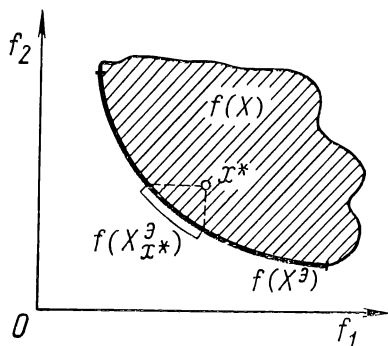


Рис. III.15

Наличие дополнительных ограничений (2) позволяет сузить множество эффективных планов и при достаточно хороших планах  $x^*$  сделать определенной задачу векторной оптимизации.

На рис. III.15 жирной линией показано множество, соответствующее части  $X^*_x^*$  множества  $X^*$ , выделенному условиями (2).

**Многоуровневая векторная оптимизация.** Множество целевых функций разбивается на  $t$  групп. На первом этапе осуществляется векторная оптимизация по первой группе целевых функций, в результате чего строится множество  $X_1^\exists$  эффективных планов первого уровня. На множестве  $X_1^\exists$  рассматривается задача векторной оптимизации со второй группой целевых функций и строится множе-

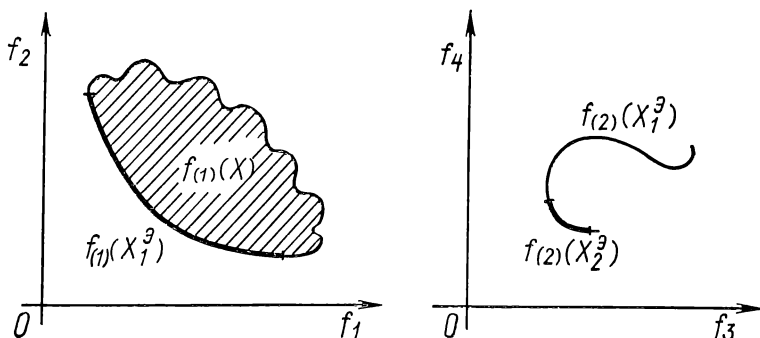


Рис. III.16

ство  $X_2^\exists$  эффективных планов второго уровня. Процесс заканчивается построением множества  $X_t^\exists$  эффективных планов высшего уровня. Если  $Df_{(t)}(X_t^\exists) \leq \varepsilon$ , где  $f_{(t)}(x)$  — совокупность целевых функций последней группы, то описанная процедура задает принцип выбора. При  $Df_{(t)}(X_t^\exists) > \varepsilon$  задача остается неопределенной. На рис. III. 16 приведена иллюстрация для случая  $q = 4$ ,  $t = 2$ ,  $f_{(1)} = \{f_1, f_2\}$ ,  $f_{(2)} = \{f_3, f_4\}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование.— М.: Сов. радио, 1973.
2. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
3. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975.
4. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.— М.: Мир, 1974.
5. Фиакко А. В., Мак-Кормик Г. П. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации.— М.: Мир, 1972.

## Глава IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Теория нелинейного программирования (гл. III), занимаясь исследованием важнейших характеристик решений экстремальных задач, позволяющих во многих конкретных случаях получить достаточно полные сведения о результате, служит и фундаментом для построения разнообразных *вычислительных методов*. Вычислительные методы нелинейного программирования разделяют на *прямые* и *непрямые*. К непрямым относят такие, в которых решение исходной задачи получают через решение другой задачи, к которой предварительно сводится исходная задача. Например, метод поиска стационарных точек функции, т. е. метод решения уравнений из условия стационарности, является непрямым методом безусловной минимизации, в котором решается задача, полученная из исходной с помощью необходимого условия минимума. Прямые \*) методы оперируют непосредственно с исходными экстремальными задачами. Большинство прямых методов, предназначенных для реализации на ЭВМ, — *дискретные*, т. е. в процессе их работы генерируются (дискретные) последовательности векторов  $x^1, x^2, \dots$  (последовательные приближения к решению (оптимальному плану)  $x^0$ ). Как правило, *итерация* (переход от одного приближения  $x^k$  к следующему  $x^{k+1}$ ) строится по схеме  $x^{k+1} = x^k + \Theta_k l^k$ , где вектор  $l^k$  называется *направлением*, число  $\Theta_k \geq 0$  — *шагом* итерации. Методы отличаются друг от друга способами вычисления  $l^k, \Theta_k$ . Если по текущей информации указываются однозначные правила вычисления  $l^k, \Theta_k$ , то метод называют *детерминированным*. В *стохастических* методах для вычисления  $l^k, \Theta_k$  привлекаются случайные механизмы. Метод называется *одношаговым*, если на текущей итерации (при вычислении  $l^k, \Theta_k$ ) используется информация о значениях элементов задачи (целевой функции, функции ограничений) только на текущем плане ( $x^k$ ). Если же на итерации привлекаются значения элементов задачи на предыдущих планах ( $x^k, x^{k-1}, \dots, x^{k-p}$ ), то метод называется *многошаговым* (с памятью глубины  $p$ ). Методу приписывается по-

---

\*) Здесь смысл слова «прямой» отличается от того, который принят в теории двойственности, но большинство прямых методов (см. § 3, 4) непосредственно опираются на прямые условия оптимальности (гл. III).



*рядок  $v$* , если на итерации используется хотя бы одна производная  $v$ -го порядка от какого-либо элемента задачи и производные более высокого порядка не используются. Методы нулевого порядка ( $v=0$ ) называют еще *методами поиска*.

Методы делят на *точные* и *приближенные*. В точных методах на каждой итерации план задачи преобразуется также в план исходной задачи. Если метод состоит в преобразовании одной оценки (приближения) плана в другую, его называют *приближенным*. Поскольку часто используются точные методы, в которых решение задачи получается за конечное число итераций, то эти методы называют и *конечными*, а приближенные — *итеративными* (с бесконечным числом итераций).

В тех разделах нелинейного программирования, в которых разработана достаточно полная теория двойственности, методы разделяются на *прямые* и *двойственные*. В прямых методах итерации проводятся на векторах, являющихся планами или их оценками, в двойственных — на векторах, которые представляют планы двойственных задач или их оценки.

Итеративный метод называется *сходящимся*, если генерирует последовательность векторов, которая сходится в детерминированном или стохастическом смысле к оптимальному плану. Иногда рассматривают *сходимость по целевой функции* ( $f(x^k) \rightarrow f(x^0)$ ) или *сходимость к условно-стационарному плану* ( $x^k \rightarrow x^*$ ). Качество сходящихся итеративных методов чаще всего оценивают по *скорости сходимости*. Если в детерминированном методе выполняются неравенства

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq q \|x^k - x^0\|, \quad 0 < q < 1, \quad k \geq K_0,$$

то говорят о *линейной скорости* (скорости сходимости геометрической прогрессии).

В случае

$$\|x^{k+1} - x^0\| \leq q \|x^k - x^0\|^\alpha, \quad k \geq K_0,$$

принято говорить, что метод имеет *сверхлинейную скорость*, если  $1 < \alpha < 2$ , и *квадратичную*, если  $\alpha = 2$ . Важные характеристики методов — объем требуемой оперативной памяти ЭВМ, устойчивость к ошибкам округления и т. п.

## § 1. Методы перебора

С незапамятных времен *метод перебора* остается первым методом, к которому обращается человек, когда ему

нужно принять решение, сделать выбор между альтернативами или, вообще, решить экстремальную задачу. С одной стороны, опыт и интуиция, а с другой — предварительные (теоретические и экспериментальные) исследования постоянно помогали ему сузить множество вариантов, среди которых искалось решение. Однако до появления современных ЭВМ возможности методов перебора были весьма ограниченными. Колоссальное быстрое действие ЭВМ привлекло к методам перебора пристальное внимание специалистов. В результате анализа эвристических приемов перебора был создан ряд *схем перебора с использованием оценок*, которые позволили решить многие прикладные задачи комбинаторного характера, не поддававшиеся усилиям ученых в течение длительного времени. Необходимо заметить, что новые схемы содержат только довольно общие рекомендации и успех их применения к конкретной задаче во многом зависит от учета специфики последней, опыта, интуиции исследователя, предварительного теоретического (аналитического) изучения задачи. Современная практика ставит настолько сложные экстремальные задачи, что только сочетание человеческого опыта, математики и ЭВМ позволяет надеяться на разумное их решение.

**1. Метод вариаций.** Методы перебора в общем случае предназначены для решения задачи дискретного программирования

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (1)$$

в которой множество планов  $X$  дискретно, т. е. состоит из конечной совокупности элементов. Именно дискретность множества  $X$  затрудняет применение для решения задачи (1) мощных средств непрерывного анализа, основанных на предельных переходах. Однако в частных случаях аналоги непрерывных методов позволяют получать интересные результаты. Например, основной метод исследования непрерывных задач (гл. I—III), состоящий в изучении бесконечно малых приращений, применить к задаче (1) в «чистом виде» нельзя, но его дискретный аналог, использующий простейшие вариации элементов из  $X$ , может привести к решению конкретной задачи. Для иллюстрации метода вариаций рассмотрим задачу минимизации штрафов при обслуживании заявок.

Имеется  $n$  заявок  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , которые нужно обслужить на одном приборе. Пусть  $T_i$  — время обслуживания,  $c_i$  — величина штрафа за единицу времени

ожидания заявки  $i$ . Требуется найти оптимальную последовательность обслуживания заявок, при которой общий штраф минимален.

Обозначим через  $i_s$  номер заявки, стоящей в очереди на  $s$ -м месте при некоторой последовательности обслуживания  $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ . Множеством  $X$  планов, среди которого ищется решение задачи, является, таким образом, множество  $\Sigma$  перестановок  $n$  чисел из  $I$ .

В перестановке  $\sigma$  во время обслуживания заявки  $i_1$  остальные заявки простаивают  $T_{i_1}$  единиц времени и, следовательно, штраф за ожидание равен  $T_{i_1} \sum_{s=2}^n c_{i_s}$ . Рассматривая периоды обслуживания заявок  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , получаем, что общий штраф для перестановки  $\sigma \in \Sigma$  равен

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= T_{i_1} \sum_{s=2}^n c_{i_s} + T_{i_2} \sum_{s=3}^n c_{i_s} + \dots + T_{i_{n-1}} c_{i_n} = \\ &= \sum_{s=2}^n c_{i_s} t_{i_s}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t_{i_s} = \sum_{k=1}^{s-1} T_{i_k}$  — время ожидания заявки  $i_s$ .

Простейшей вариацией плана  $\sigma$  назовем транспозицию его элементов  $i_s, i_{s+1}$  (*перестановочный прием*). Новый план обозначим через  $\bar{\sigma}$ .

Поскольку время ожидания для заявки  $i_s$  возросло на  $T_{i_{s+1}}$ , для заявки  $i_{s+1}$  уменьшилось на  $T_{i_s}$ , для остальных заявок осталось без изменения, то приращение целевой функции (2) равно

$$f(\bar{\sigma}) - f(\sigma) = c_{i_s} T_{i_{s+1}} - c_{i_{s+1}} T_{i_s}. \quad (3)$$

Для оптимальности перестановки  $\sigma$  необходимо, чтобы  $f(\bar{\sigma}) - f(\sigma) \geq 0$ . Учитывая (3), получаем, что неравенства

$$\frac{c_{i_1}}{T_{i_1}} \geq \frac{c_{i_2}}{T_{i_2}} \geq \dots \geq \frac{c_{i_n}}{T_{i_n}} \quad (4)$$

необходимы для оптимальности перестановки  $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ .

Рассматриваемая задача имеет решение. На всех пе-

рестановках  $\sigma$ , удовлетворяющих неравенствам (4), целевая функция (2) принимает одно и то же значение. Поэтому неравенства (4) представляют и достаточные условия оптимальности.

Согласно (4) в первую очередь обслуживаются заявки с наибольшим относительным штрафом  $c_i/T_i$ .

**З а м е ч а н и е.** Если заявки интерпретировать как посетителей приемной,  $T_i$  — как время рассмотрения вопроса посетителя  $i$ ,  $c_i=1$ , то минимальным суммарное время ожидания приема всеми посетителями будет только в том случае, когда первыми принимаются посетители с «мелкими» вопросами.

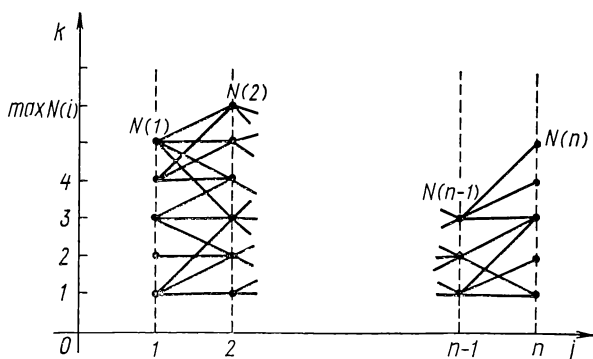


Рис. IV.1

**2. Две схемы перебора множества целочисленных планов.** Рассмотрим множество  $X$  планов

$$X = \{x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_i \in \{1, 2, \dots, N(i)\}, i = \overline{1, n}\},$$

состоящее из  $n$ -векторов, компоненты которых принимают значения из заданных множеств натуральных чисел. Легко подсчитать количество  $|X|$  элементов множества  $X$ :  $|X| = \prod_{i=1}^n N(i)$ .

Наглядное представление о множестве  $X$  можно получить из рис. IV.1. Каждая ломаная, соединяющая прямые  $j=1, j=n$ , — это план,  $|X|$  — число ломаных, которые можно провести через отмеченные точки. Пересчитать все планы можно по принципу счетчика. Точки на прямой  $j=n$  — элементы первого разряда, точки на прямой  $j=n-1$  — элементы второго разряда и т. д.

При реализации методов перебора используются две схемы перебора элементов на  $X$ . В первой схеме, которая тесно связана с указанным выше счетчиком, множеству  $X$  ставится в соответствие дерево с корнем в узле 0 (рис. IV.2). Из каждого узла дерева на уровне  $0 \leq i \leq n-1$  выходят  $N(i+1)$  дуг до уровня  $i+1$ . Между узлами на уровне  $n$  (или соответствующими им единствен-

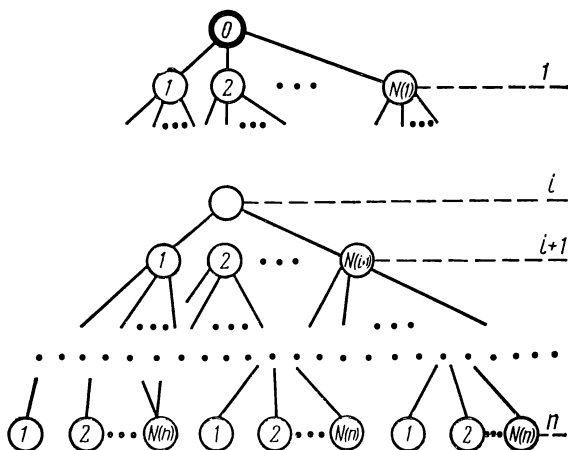


Рис. IV.2

ными путями из узла 0 в них) и элементами множества  $X$  существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому перебирать элементы из  $X$  и составлять из них различные подмножества можно по узлам дерева на уровнях от 1 до  $n$ .

Вторая схема перебора состоит в следующем (рис. IV.3). Из точки 0 в некоторую точку  $y = p \in N(1)$  проведем прямую, которую будем рассматривать в качестве первого звена ломаной и называть 1-частичным планом. Ясно, что количество 1-частичных планов равно  $N(1)$ . Добавление к 1-частичному плану  $\{0, p\}$  любого звена  $\{p, q\}$ , где  $q$  — точка на прямой  $j=2$ , из множества значений компоненты  $x_2$  называется развитием 1-частичного плана, приводящее к 2-частичному плану  $\{0, p, q\}$ . Количество 2-частичных планов равно  $N(1)N(2)$ . Продолжая процесс развития частичных планов через  $n$  шагов, получим  $n$ -частичные планы, которые можно поста-

вить во взаимно-однозначное соответствие с планами задачи (1).

**3. Первый метод перебора \*) (метод ветвей и границ).** Рассмотрим задачу (1). Предположим, что для любого подмножества  $X^* \subset X$  можно построить две функции: *миноранту*  $\underline{f}(x, X^*)$  и *мажоранту*  $\bar{f}(x, X^*)$  функции  $f(x)$ :

$$\underline{f}(x, X^*) \leq f(x) \leq \bar{f}(x, X^*), \quad x \in X^*,$$

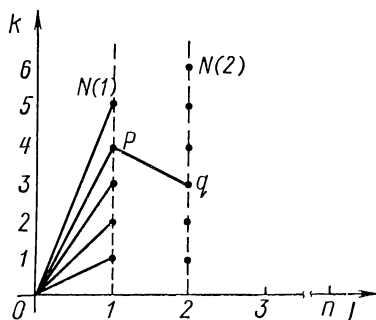


Рис. IV.3

которые допускают доопределение на некоторое расширение  $\bar{X}^* \supset X^*$  множества  $X^*$ .

Числа  $\xi(X^*)$ ,  $\eta(X^*)$ ,

$$\xi(X^*) \leq \min_{x \in \bar{X}^*} \underline{f}(x, X^*), \quad \eta(X^*) \geq \min_{x \in \bar{X}^*} \bar{f}(x, X^*),$$

называются *нижней* и *верхней оценками* (границами) множества  $X^*$ .

Каждая итерация метода ветвей и границ начинается с формирования списка множеств. Начальный список  $S_0$  состоит из множества  $X$ . Множеству  $X$  припишем оценки  $\xi(X)$ ,  $\eta(X)$ , число  $r^0 = \infty$  (*рекорд*), если не известны планы задачи (1), и  $r^0 = \min f(x^i)$ , где минимум вычислен по известным к началу итерации планам  $x^i \in X$ . При  $r^0 \leq \xi(x) + \varepsilon$  план  $x^{h_0}$  ( $f(x^{h_0}) = r^0$ ) —  $\varepsilon$ -оптимальный. Пусть на  $k$ -й итерации имеется список  $S_k$ -множеств. Для каж-

\*) Хотя в нелинейном программировании не существует общей теории двойственности, излагаемые в данном параграфе методы можно трактовать как двойственные к традиционным прямым методам направленного перебора нелинейного программирования (см. далее).

дого элемента списка подсчитаем оценки  $\xi(X_k)$ ,  $\eta(X_k)$ . Если при этом будут построены новые планы, то найдем минимальное значение  $f_k$  целевой функции на этих планах. Число  $r^k = \min\{r^{k-1}, f_k\}$  назовем рекордом, план  $x^k (r^k = f(x^k))$  — рекордным планом  $k$ -й итерации. Если  $r^k \leq \min_{X_k \in S_k} \xi(X_k) + \varepsilon$ , то  $x^k$  —  $\varepsilon$ -оптимальный план. Процесс

решения задачи (1) продолжаем в случае, когда степень приближения  $\varepsilon$  неудовлетворительна. При этом из списка

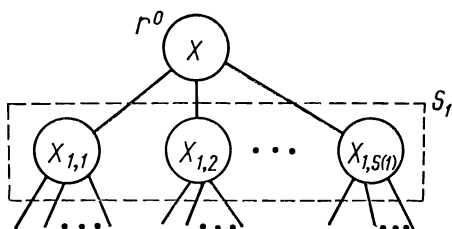


Рис. IV.4

$S_k$  прежде всего удаляем все множества  $X_k^*$ , для которых имеет место неравенство  $\xi(X_k^*) > \min \eta(X_k)$ ,  $X_k \in S_k$ . Далее, среди оставшихся элементов списка выбираем множество  $X_k^0$  для операции ветвления, которая состоит в разбиении множества  $X_k^0$  на подмножества

$$X_{k,1}^0, \dots, X_{k,s(k)}^0; X_k^0 = \bigcup_{t=1}^{s(k)} X_{k,t}^0, X_{k,t}^0 \cap X_{k,t_1}^0 = \emptyset, \\ \text{если } t \neq t_1. \quad (5)$$

Классическое правило выбора  $X_k^0$  основано на равенстве

$$\xi(X_k^0) = \min \xi(X_k), X_k \in S_k.$$

Множество  $X_k^0$  удалим из списка  $S_k$  и введем в него множества (5), что приведет к списку  $S_{k+1}$  для новой итерации.

Изложенная процедура допускает наглядную интерпретацию с помощью дерева (рис. IV.4).

Из конечности элементов множества  $X$  следует, что для любого  $\varepsilon \geq 0$  через конечное число операций ветвления (итераций) будет найден  $\varepsilon$ -оптимальный план. Обоснование приведенных утверждений не выходит за рамки

элементарных рассуждений и оставляется читателям. Для контроля операций метода ветвей и границ удобно пользоваться условной геометрической интерпретацией, приведенной на рис. IV.5.

Как видно из описания метода ветвей и границ, метод указывает лишь общую схему действий. Ее реализация на конкретных задачах состоит в выборе стратегий вет-

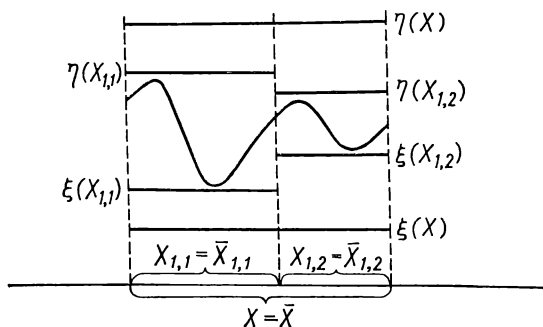


Рис. IV.5

вления и указании способов вычисления оценок. Успех реализации зависит от степени учета специфики задачи, опыта и интуиции исследователя.

Для иллюстрации метода ветвей и границ решим три конкретные задачи.

**Пример 1** (задача о рюкзаке). Имеется  $n$  предметов с номерами  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Вес предмета  $i$  равен  $p_i$ , ценность  $c_i$ . Требуется при заданной ценности  $c$  груза выбрать совокупность предметов минимального веса.

Введем (булевы, бивалентные) переменные  $x_i: x_i = 1$ , если предмет  $i$  укладывается в рюкзак;  $x_i = 0$ , если предмет  $i$  не укладывается в рюкзак. Тогда математическая модель задачи о рюкзаке примет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \geq c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Задачу (6) решим с числовыми данными из табл. IV.1. В этой задаче целевая функция простая и поэтому можно обойтись без использования минорант и мажорант или, другими словами, положить  $\bar{f}(x, X) \equiv f(x) \equiv \bar{f}(x, X)$ ,  $x \in \bar{X}$ .

Распространенный способ расширения множеств планов, в определение которых входит требование целочисленности, — переход к множеству элементов, удовлетворяющих всем ограничениям задачи, за исключением условия целочисленности (т. е. переход от «диск-



$i$	1	2	3	4	5		
$c_i$	20	10	12	7	6	$\geq$	40
$p_i$	4	3	5	1	2		$\min$

ретной» задачи к «непрерывной»). Понятно, что оптимальное значение целевой функции на расширенном множестве  $\bar{X}$  есть оценка  $\xi$  исходного множества. Для множества  $X$  планов задачи (6)

$$X = \{x : 20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 40, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, 5}\}$$

расширением является множество

$$\bar{X} = \{x : 20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 40, 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, 5}\}.$$

Оценка  $\xi(X)$  равна

$$\xi(X) = \min(4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5), \quad (7)$$

$$20x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 40, 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, 5}.$$

Физический смысл задачи (7), которую называют *задачей о рюкзаке с делимыми предметами* (так сказать, *непрерывная задача о рюкзаке*), состоит в следующем: предметы допускают сколь угодно мелкое дробление без потери относительной ценности; нужно при этих условиях засыпать в рюкзак груз минимального веса из заданных предметов так, чтобы ценность груза была не меньше 40. Очевиден метод решения последней задачи. Нужно найти предмет с наименьшим относительным весом  $p_i/c_i$  на единицу ценности. Из табл. IV.1 видно, что таковым является четвертый предмет  $p_4/c_4 = 1/7$ . Этот предмет в раздробленном виде нужно засыпать до тех пор, пока не будет достигнута заданная стоимость груза или не будет засыпан весь предмет. В данном случае максимальная стоимость от загрузки предмета 4 равна 7. С оставшимися предметами поступаем аналогично. Следующими по относительной ценности предметами будут 1 ( $p_1/c_1 = 1/5$ ), 2 ( $p_2/c_2 = 3/10$ ), 5 ( $p_5/c_5 = 1/3$ ). Предмет 5 загружается не весь: для достижения заданной ценности достаточно загрузить только половину пятого предмета. В результате получаем оптимальный план  $\{x_1^0 = x_2^0 = x_4^0 = 1, x_3^0 = 0, x_5^0 = 1/2\}$  задачи (7) и оценку  $\xi(X) = 9$  множества  $X$  планов задачи (6). Компонента  $x_5^0$  в решении задачи (7) дробная. Множество  $X$  ветвим на два множества:

$$X_{1,1} = \{x \in X : x_1 = 0\}, X_{1,2} = \{x \in X : x_1 = 1\},$$

т. е.

$$X_{1,1} = \{x : x_1 = 0, 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 40, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{2, 5}\},$$

$$X_{1,2} = \{x : x_1 = 1, 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 20, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{2, 5}\}.$$

На неформальном языке:  $X_{1,1}$  — множество планов задачи (6), у ко-

торых значение первой переменной  $x_1$  равно нулю,  $X_{1,2}$  — множество таких планов, что  $x_1=1$ .

Вычисление оценок  $\xi(X_{1,1})$ ,  $\xi(X_{1,2})$  сводится к решению задач

$$\begin{aligned} \xi(X_{1,1}) &= \min(3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5), \\ 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 &\geq 40, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{2, 5}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \xi(X_{1,2}) &= \min(3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5), \\ 10x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 &\geq 20, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{2, 5}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задачи (8), (9) решаем описанным выше методом. В задаче (8) загрузка всех предметов  $\overline{2, 5}$  не позволяет получить ценность 40. Таким образом, задача (8) не имеет решения. Полагаем  $\xi(X_{1,1}) = \infty$  и множество  $X_{1,1}$  исключаем из рассмотрения. Из (9) получаем  $\xi(X_{1,2}) = 9$ . Оптимальный план задачи (9) нецелочисленный. В списке после исключения  $X$ ,  $X_{1,1}$  остается только множество  $X_{1,2}$ . Это множество ветвим на множества  $X_{2,1} = \{x \in X_{1,2} : x_2 = 0\}$ ,  $X_{2,2} = \{x \in X_{1,2} : x_2 = 1\}$ , т. е.

$$\begin{aligned} X_{2,1} &= \{x : x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 20, \\ &\quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{3, 5}\}, \\ X_{2,2} &= \{x : x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 10, \\ &\quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{3, 5}\}. \end{aligned}$$

Вычисление оценок  $\xi(X_{2,1})$ ,  $\xi(X_{2,2})$  сводится к решению задач

$$\begin{aligned} \xi(X_{2,1}) &= 4 + \min(5x_3 + x_4 + 2x_5), \quad 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 20, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{3, 5}, \\ \xi(X_{2,2}) &= 7 + \min(5x_3 + x_4 + 2x_5), \quad 12x_3 + 7x_4 + 6x_5 \geq 10, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{3, 5}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \xi(X_{2,1}) = 9 - \frac{11}{12}, \quad \xi(X_{2,2}) = 9.$$

В списке  $S_2$  имеются два множества  $X_{2,1}$ ,  $X_{2,2}$ . Оценка  $\xi$  последнего множества наименьшая. Поэтому оно подвергается ветвлению на множества  $X_{3,1}$ ,  $X_{3,2}$ :

$$\begin{aligned} X_{3,1} &= \{x : x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad 7x_4 + 6x_5 \geq 10, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{4, 5}\}, \\ X_{3,2} &= \{x : x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad 7x_4 + 6x_5 \geq -2, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{4, 5}\}. \end{aligned}$$

Оценки этих множеств равны  $\xi(X_{3,1}) = 9$ ,  $\xi(X_{3,2}) = 12$ , причем при вычислении последней получается план исходной задачи  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$ . Таким образом, это рекордный план с рекордом 12. Этот рекорд от минимально возможного веса отличается не более чем на  $12 - 9 = 3$  единицы.

В список теперь входят множества  $X_{2,1}$ ,  $X_{3,1}$ ,  $X_{3,2}$ . Оценка множества  $X_{3,1}$  наименьшая. Поэтому ветвим его на два множества:

$$\begin{aligned} X_{4,1} &= \{x : x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad 6x_5 \geq 10, \quad x_5 = 0 \vee 1\}, \\ X_{4,2} &= \{x : x_1 = x_2 = x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad 6x_5 \geq 3, \quad x_5 = 0 \vee 1\}. \end{aligned}$$

Подсчитаем оценки этих множеств:  $\xi(X_{4,1}) = \infty$ ,  $\xi(X_{4,2}) = 9$ . После исключения из списка множеств  $X_{3,1}$ ,  $X_{4,1}$  множеством с наименьшей оценкой стало  $X_{4,2}$ . Множество  $X_{4,2}$  ветвим на множества

$$X_{5,1} = \{x: x_1 = x_2 = x_4 = 1, x_3 = x_5 = 0\}, X_{5,2} = \{x: x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 1, x_3 = 0\}.$$

Подсчитаем  $\xi(X_{5,1}) = \infty$ ,  $\xi(X_{5,2}) = 10$ . При этом получен новый рекордный план  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$  исходной задачи с ре-

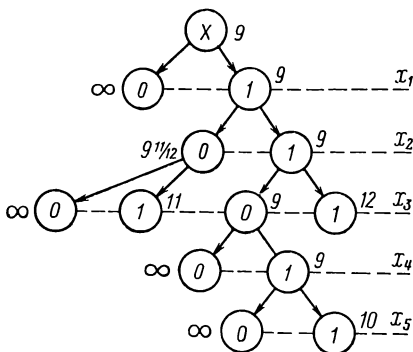


Рис. IV.6

кордом 10. Новый рекорд от минимально возможного веса отличается не более чем на  $10 - 9^{11/12} = 1/12$ . (Получен оптимальный план, ибо в данном примере оптимальный вес отличается от других не менее чем единицу.)

Множество  $X_{5,1}$  исключаем из списка. Наименьшую оценку имеет множество  $X_{2,1}$ . Ветвим его на множества

$$X_{6,1} = \{x: x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0, 7x_4 + 6x_5 \geq 20, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{4,5}\},$$

$$X_{6,2} = \{x: x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, 7x_4 + 6x_5 \geq 10, x_i = 0 \vee 1, i = \overline{4,5}\}.$$

Оценки построенных множеств равны:  $\xi(X_{6,1}) = \infty$ ,  $\xi(X_{6,2}) = 11$ . После исключения множества  $X_{2,1}$  из списка минимальную оценку имеет множество  $X_{5,2}$ . Его оценка совпадает с рекордом. Следовательно, последний рекордный план  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$  — оптимальный план исходной задачи. Таким образом, минимальный вес рюкзака равен 10 и достигается при загрузке предметов с номерами 1, 2, 4, 5. Суммарная ценность груза равна 43.

Все приведенные вычисления удобно изображать графически (рис. IV.6). В узлах дерева отмечены значения переменных данного уровня (переменные записаны справа). Около узлов записаны оценки множеств. На каждой итерации для ветвления выбирается висячий узел с наименьшей оценкой  $\xi$ .

Пример 2 (задача целочисленного линейного программирования). Рассмотрим задачу, к которой впервые был применен метод ветвей и границ:

$$c'x \rightarrow \min, Ax \leq b, x \geq 0, x \text{ — целочисленный вектор.} \quad (10)$$

Расширим множество планов  $X$  задачи (10), исключив требование целочисленности:  $\bar{X} = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ . Тогда число  $\xi(X)$ ,

$$\xi(X) = c' \bar{x}^0 = \min c'x, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (11)$$

станет оценкой множества  $X$ . Если окажется, что решение  $\bar{x}^0$  «непрерывной» задачи линейного программирования (11) — целочисленный вектор, то  $\bar{x}^0$  — оптимальный план исходной задачи.

«Округление» вектора  $\bar{x}^0$  (замена одним из соседних целочисленных векторов) не всегда дает удовлетворительный результат и может привести к вектору, который не является даже планом задачи (10).

Пусть  $\bar{x}_{i_1}^0$  — нецелочисленная компонента вектора  $\bar{x}^0$ . Множество  $X$  ветвим на два подмножества  $X_{1,1}$ ,  $X_{1,2}$ :

$$X_{1,1} = \{x \in X : x_{i_1} \leq [\bar{x}_{i_1}^0]\}, \quad X_{1,2} = \{x \in X : x_{i_1} \geq [\bar{x}_{i_1}^0] + 1\},$$

где символом  $[a]$  обозначена целая часть числа  $a$ . В качестве расширений  $\bar{X}_{1,1}$ ,  $\bar{X}_{1,2}$  возьмем множества

$$\bar{X}_{1,1} = \{x : Ax \leq b, x \geq 0, x_{i_1} \leq [\bar{x}_{i_1}^0]\}, \quad \bar{X}_{1,2} = \{x : Ax \leq b, x \geq 0, x_{i_1} \geq [\bar{x}_{i_1}^0] + 1\}.$$

Для вычисления оценок  $\xi(X_{1,1})$ ,  $\xi(X_{1,2})$  получаются задачи линейного программирования:

$$\xi(X_{1,1}) = c'x^{1,1} = \min c'x, Ax \leq b, x \geq 0, x_{i_1} \leq [\bar{x}_{i_1}^0],$$

$$\xi(X_{1,2}) = c'x^{1,2} = \min c'x, Ax \leq b, x \geq 0, x_{i_1} \geq [\bar{x}_{i_1}^0] + 1.$$

Каждая из этих задач отличается от (11) только одним дополнительным ограничением. Поэтому целесообразно решать их двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственный базисный план, построенный по оптимальным потенциалам задачи (11) (см. п. 6 § 3 гл. I).

Дальнейшие операции стандартны для метода ветвей и границ.

На рис. IV.7 приведены результаты решения с помощью геометрического метода числового примера:  $x_1 + x_2 \rightarrow \max$ ,  $x_1 + 9x_2 \leq 27$ ,  $7x_1 + 3x_2 \leq 14$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  — целые числа.

Пример 3 (задача о минимизации времени переналадок при обработке деталей на одном станке). На универсальном станке обрабатываются одинаковые партии из  $n$  деталей. Переход от обработки детали  $i$  к обработке детали  $j$  требует переналадки станка, которая занимает  $c_{ij}$  единиц времени. Требуется найти последовательность обработки деталей, при которой общее время переналадок станка при обработке партии деталей минимально.

Эта задача в другой терминологии известна как классическая комбинаторная задача коммивояжера (бродячего торговца), который должен выбрать кратчайший маршрут однократного посещения  $n$  городов с возвратом в начальный город. Успешное применение к ней метода ветвей и границ привлекло к последнему широкое внимание специалистов и сделало метод весьма популярным методом решения задач дискретного программирования.

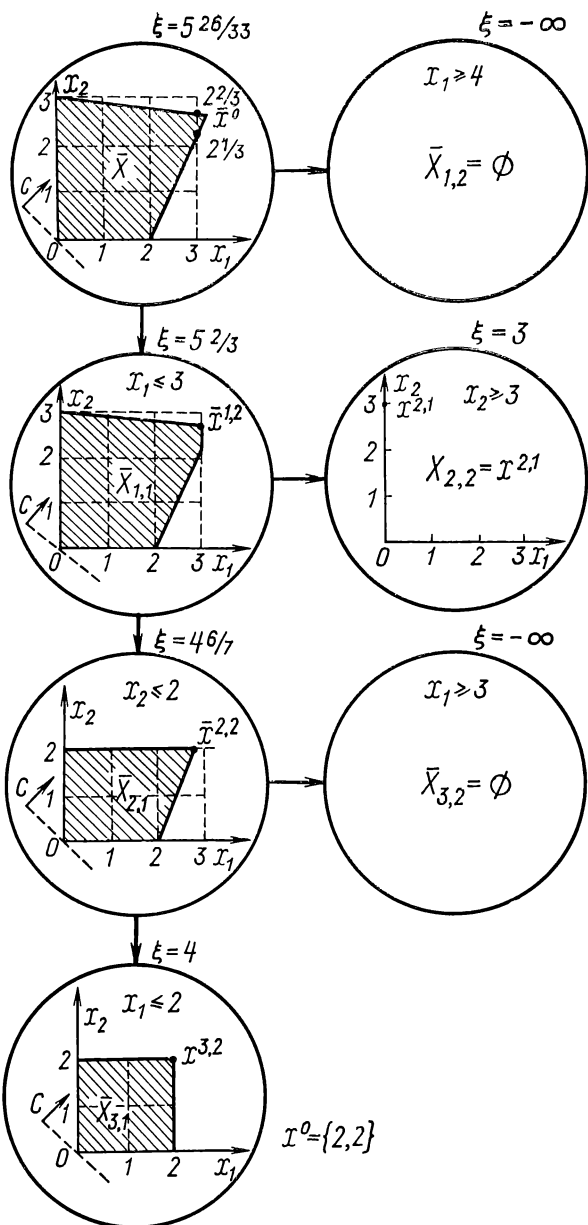


Рис. IV.7

В графической интерпретации рассматриваемая задача состоит в построении на сети  $S = \{I, U\}$  контура (без самопересечений) минимальной длины, проходящего через все узлы сети (рис. IV.8). При этом  $c_{ij}$  — длина дуги  $(i, j) \in U$ . Отсутствие дуги из узла  $i$  в узел  $j$  означает, что обработка детали  $j$  после обработки детали  $i$  не допустима ( $c_{ij} = \infty$ ). Введем булеву переменную  $x_{ij}$ :  $x_{ij} = 1$ , если после детали  $i$  обрабатывается деталь  $j$ ;  $x_{ij} = 0$ , если после детали  $i$  деталь  $j$  не обрабатывается.

После обработки каждой детали  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  будет обра-

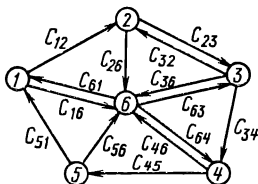


Рис. IV.8

ботана какая-то деталь из  $I_i^+$ . Это можно записать следующим образом:

$$\sum_{i \in I_i^+} x_{ij} = 1, \quad i \in I. \quad (12)$$

Аналогично равенство

$$\sum_{i \in I_j^-} x_{ij} = 1, \quad j \in I, \quad (13)$$

означает, что к обработке каждой детали  $j$  приступают после обработки какой-то детали  $i \in I_j^-$ .

Общее время переналадок станка равно

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}. \quad (14)$$

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи состоит в минимизации функции (14) на множестве  $X$  планов, заданных равенствами (12), (13), условием  $x_{ij} = 0 \vee 1$ ,  $(i, j) \in U$ , и требованием  $K$ : дуги  $(i, j) \in U$  с  $x_{ij} = 1$  составляют контур сети  $S$ . Контуром сети  $S$  будем называть контур, проходящий через все узлы сети  $S = \{I, U\}$ . Подконтуром назовем контур, проходящий не через все узлы сети  $S$ .

Расширением множества  $X$  является множество

$$\bar{X} = \left\{ x : \sum_{i \in I_i^+} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i \in I_j^-} x_{ij} = 1, \quad i, j \in I, \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad (i, j) \in U \right\},$$

полученное из  $X$  после отказа от целочисленности планов и требования  $K$ .

Для вычисления оценки  $\xi(X)$  рассмотрим оценочную задачу

$$\begin{aligned} \underline{f}(x) = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} = 1, \quad \sum_{i \in I_j^-} x_{ij} = 1, \\ i, j \in I, \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad (i, j) \in U. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача (15) представляет собой частный случай транспортных задач (§ 4 гл. II) и называется *задачей о назначениях*, поскольку допускает наглядную интерпретацию, которая состоит в минимизации расходов при назначении  $n$  работников на  $n$  работ.

Понятно, что целевая функция  $\underline{f}(x)$  задачи (15) есть миноранта целевой функции исходной задачи. При вычислении оценки множества  $X$  не обязательно решать задачу (15), хотя для нее известны эффективные методы (например, *венгерский метод*). Согласно определению оценки  $\xi(X)$  достаточно обеспечить неравенство

$$\xi(X) \leq \min_{x \in \bar{X}} \underline{f}(x).$$

Подобные неравенства уже встречались в теории двойственности (§ 2 гл. I). Напомним: значение двойственной функции  $\psi(\lambda)$  на любом двойственном плане  $\lambda$  не превосходит значения  $\varphi(x)$  на любом прямом плане  $x$ . Двойственной к (13) является задача

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in I} v_j - \sum_{(i,j) \in U} w_{ij} \rightarrow \max, \quad u_i + v_j - w_{ij} \leq c_{ij}, \\ w_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U. \end{aligned} \quad (16)$$

Легко проверить, что совокупность чисел

$$\begin{aligned} u_i = \min_{j \in I_i^+(U)} c_{ij}, \quad i \in I, \quad v_j = \min_{i \in I_j^-(U)} (c_{ij} - u_i), \quad j \in I, \\ w_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U, \end{aligned} \quad (17)$$

составляет двойственный план. Следовательно, в качестве оценки  $\xi(X)$  можно взять число  $\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)$ .

Пусть известен некоторый план  $\{u, v, w\}$  задачи (16), такой, что  $w_{ij} = 0, (i, j) \in U$ . Построим по нему копоток  $\delta = \{\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, (i, j) \in U\}$ . План  $\{u, v, w\}$  (копоток  $\delta$ ) назовем согласованным планом (копотоком) на сети  $S = \{I, U\}$ , если

$$\alpha_i = \min_{j \in I_i^+(U)} \delta_{ij} = 0, \quad \beta_j = \min_{i \in I_j^-(U)} (\delta_{ij} - \alpha_i) = 0. \quad (18)$$

Если условия согласования (18) не выполняются, то план  $\{u, v, w\}$  можно улучшить, заменив его планом  $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ :

$$\bar{u}_i = u_i + \alpha_i, \quad i \in I; \quad \bar{v}_j = v_j + \beta_j, \quad j \in I; \quad \bar{w}_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U. \quad (19)$$

При этом целевая функция задачи (16) возрастает на величину

$$\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in I} \beta_j.$$

Согласованному плану (19) соответствует согласованный копоток

$$\bar{\delta} = \{\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_i - \beta_j, (i, j) \in U\}. \quad (20)$$

Легко проверить, что план (17) — согласованный план на сети  $S = \{I, U\}$ . Построим по плану (17) копоток  $\delta$  и рассмотрим множество дуг  $U_* = \{(i, j) : \delta_{ij} = 0, (i, j) \in U\}$ . Если из дуг множества  $U_*$  можно построить контур  $K_*$  сети  $S$ , то числа  $\{x_{ij} = 1, (i, j) \in K_*, x_{ij} = 0, (i, j) \in U \setminus K_*\}$  являются решением исходной задачи.

Предположим, что из дуг множества  $U_*$  невозможно составить контуры сети. Выберем любую дугу  $(i_0, j_0) \in U_*$ , принадлежащую какому-нибудь подконтуру, составленному из дуг  $U_*$ . Множество  $X$  ветвим на подмножества:

$$X_{1,1} = X_{(i_0, j_0)_0} = \{x \in X : x_{i_0 j_0} = 0\}, \quad X_{1,2} = X_{(i_0, j_0)_1} = \\ = \{x \in X : x_{i_0 j_0} = 1\}.$$

Ясно, что  $X = X_{1,1} \cup X_{1,2}$ ,  $X_{1,1} \cap X_{1,2} = \emptyset$ .

Условие  $x_{i_0 j_0} = 0$  эквивалентно требованию, чтобы деталь  $j_0$  не обрабатывалась после детали  $i_0$ . Это требование выполнится, если удалить дугу  $(i_0, j_0)$  из сети  $S$  (или положить  $c_{i_0 j_0} = \infty$ ). В общем случае для сети  $S_{1,1} = \{I, U_{1,1}\}$ ,  $U_{1,1} = U \setminus (i_0, j_0)$ , копоток  $\delta$ , построенный по плану (17), будет несогласованным. По правилам (20) перейдем к согласованному копотоку на сети  $S_{1,1}$ . При этом целевая функция задачи (16) возрастет на величину  $\alpha_{i_0} + \beta_{j_0}$ , где  $\alpha_{i_0} = \min_{j \in I_{i_0}^+(U_{1,1})} \delta_{i_0 j}$ ,  $\beta_{j_0} = \min_{i \in I_{j_0}^-(U_{1,1})} (\delta_{ij_0} - \alpha_i)$ . Следовательно, величину  $\xi(X_{1,1}) = \xi(X) + \alpha_{i_0} + \beta_{j_0}$  можно взять в качестве оценки множества  $X_{1,1}$ .

Рассмотрим множество  $X_{1,2}$ . Условие  $x_{i_0 j_0} = 1$  эквивалентно требованию, чтобы после детали  $i_0$  обязательно обрабатывалась деталь  $j_0$ . Отсюда следует, что после детали  $i_0$  ни одна из деталей  $j \in I_{i_0}^+(U) \setminus j_0$  не обрабатывается, перед обработкой детали  $j_0$  ни одна из деталей  $i \in I_{j_0}^-(U) \setminus i_0$  не обрабатывается и после детали  $j_0$  нельзя обрабатывать деталь  $i_0$ , т. е.  $x_{ij} = 0$ ,

$$(i, j) \in U_{1,2}^0 = \{(i_0, j), j \in I_{i_0}^+(U) \setminus j_0; (i, j_0), i \in I_{j_0}^-(U) \setminus i_0; (j_0, i_0)\}.$$

Выполнения последних равенств можно добиться, удалив из сети  $S$  дуги  $(i, j) \in U_{1,2}^0$ . Для  $S_{1,2} = \{I, U_{1,2}\}$ ,  $U_{1,2} = \{U \setminus U_{1,2}^0\}$ , копоток, построенный по плану (17), будет несогласованным. По правилам (20) перейдем к согласованному копотоку на сети  $S_{1,2}$  и в качестве оценки  $\xi(X_{1,2})$  множества  $X_{1,2}$  возьмем значение целевой функции задачи (16) на согласованном копотоке (на согласованном двойственном плане). В результате получим



$$\xi(X_{1,2}) = \xi(X) + \sum_{i \in I \setminus I_0} \alpha_i + \sum_{j \in I \setminus I_0} \beta_j,$$

$$\alpha_i = \min_{j \in I_i^+(U_{1,2})} \delta_{ij}, \quad \beta_j = \min_{i \in I_j^-(U_{1,2})} (\delta_{ij} - \alpha_i).$$

Из множеств  $X_{1,1}$ ,  $X_{1,2}$  выбираем множество с наименьшей оценкой и поступаем с ним, как с исходным множеством  $X$ .

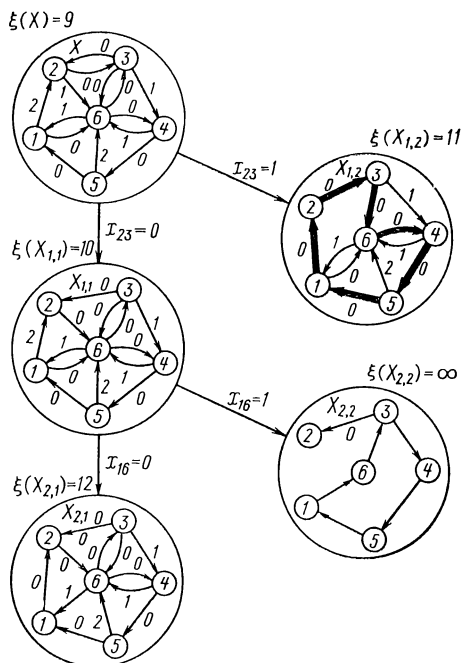


Рис. IV.9

На рис. IV.9 приведены результаты решения задачи, изображенной на рис. IV.8 со следующими числовыми данными:  $c_{12}=2$ ,  $c_{16}=0$ ,  $c_{26}=3$ ,  $c_{23}=2$ ,  $c_{32}=1$ ,  $c_{36}=1$ ,  $c_{34}=2$ ,  $c_{45}=4$ ,  $c_{46}=5$ ,  $c_{51}=1$ ,  $c_{56}=3$ ,  $c_{61}=2$ ,  $c_{63}=1$ ,  $c_{64}=1$ . На рис. IV.9 числа над дугами равны дуговым коптокам.

При оптимальной обработке партии детали в обработку запускаются в следующей последовательности:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ , которая на рис. IV.9 обозначена жирной линией. Минимальное время переналадок равно 11.

#### 4. Второй метод перебора. Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g(x) \leq 0, \quad x \in Q, \quad (21)$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  — скалярные функции;  $Q$  — множество  $n$ -мерного пространства  $R_n$ . Процесс начинается с 0-частичного плана. Если дополнительно к (21) известны планы, то вычисляется рекорд  $r^0$  и рекордный план. Пусть на  $k$ -й итерации имеется множество  $X_k$   $k$ -частичных планов  $\{x_1, \dots, x_k\}$  и рекорд  $r^k$ . Развитие  $k$ -частичного плана  $\{x_1, \dots, x_k\}$  не имеет смысла в двух случаях: 1) при любом его развитии до полного плана  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  выполняется неравенство  $f(x) > r^k$ ; 2)  $g(x) > 0$ . В этих случаях из перебора исключаются все планы, которые можно получить развитием данного  $k$ -частичного плана. Например, при рекорде  $r^2 = 0$  нет смысла развивать 2-частичный план  $\{1, 1\}$  для целевой функции  $f(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4$ ,  $x_i = 0 \vee 1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , ибо для каждого плана  $\{1, 1, 0, 0\}$ ,  $\{1, 1, 0, 1\}$ ,  $\{1, 1, 1, 0\}$ ,  $\{1, 1, 1, 1\}$ , полученного развитием частичного плана, значение целевой функции положительно. Аналогично 2-частичный план  $\{1, 0\}$  не имеет смысла развивать в задаче с ограничением  $g(x) \leq 0$ ,  $g(x) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 1$ ,  $x_i = 0 \vee 1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , ибо, как нетрудно подсчитать, для каждого плана  $x$ , полученного развитием частичного плана, будет выполняться неравенство  $g(x) > 0$ .

В некоторых задачах развитие  $k$ -частичного плана возможно лишь через одно (или небольшое количество) значение  $x_{k+1}$ . В этом случае из перебора исключаются планы, которые можно получить развитием  $k$ -частичного плана через другие значения  $x_{k+1}$ . Например, при рекорде  $r^2 = 0$  развитие 2-частичного плана  $\{1, 0\}$  в задаче с целевой функцией  $f(x) = 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4$ ,  $x_i = 0 \vee 1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , возможно лишь через  $x_3 = 1$ , ибо при  $x_3 = 0$  любое дальнейшее развитие приводит к плану  $x$  с  $f(x) > 0$ . Аналогично для ограничения  $g(x) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 0$ ,  $x_i = 0 \vee 1$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , развитие 2-частичного плана возможно только через  $x_3 = 0$ , ибо при любом развитии через  $x_3 = 1$  ограничение будет нарушаться.

Изложенный метод перебора чаще всего применяется для задач (21) с *сепарабельными функциями*  $f(x)$ ,  $g(x)$  ( $f(x) = \sum_i f_i(x_i)$ ) и множествами  $Q$  типа гиперкуба.

Для вычисления рекорда и проведения оценок, связан-

ных с развитием частичных планов, можно в случае сложных функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  использовать их миноранты и мажоранты. Соответствующие модификации метода оставляем читателям в качестве упражнения.

**З а м е ч а н и е.** Второй метод перебора, как и метод динамического программирования (гл. V), естествен для динамических (многоэтапных) процессов принятия решений (управления) и относится к *временным* (динамическим) методам оптимизации в отличие от *пространственных* (статических), о которых шла речь в начале главы. В динамических методах приближения к решению (оптимальному плану) строятся по решениям последовательности аналогичных задач меньшей размерности (состоящих из меньшего числа этапов). Процесс решения как бы разворачивается во времени. В статических методах количество этапов фиксировано и итерации представляют переходы из одного элемента к другому в пространстве фиксированной размерности.

## § 2. Минимизация функций одной переменной

Значение эффективных численных методов минимизации функций одной переменной определяется в основном тем, что они входят составной частью во многие методы решения сложных экстремальных задач.

**1. Метод построения точки абсолютного минимума гладкой функции.** Рассмотрим задачу минимизации гладкой функции на отрезке:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X = [a, b]. \quad (1)$$

Для решения задачи (1) воспользуемся идеей метода ветвей и границ. Оценка  $\xi(X)$  множества  $X$ ,

$$\xi(X) \leq f(x), x \in X,$$

с точки зрения теории приближений функций является аппроксимацией снизу (рис. IV.10) функции  $f(x)$  с помощью постоянной функции  $y = f_X^0(x) \equiv \xi(X)$ . Если при некотором  $x^* \in X$  выполняется неравенство  $\xi(X) \leq f(x^*) - \varepsilon$ , то  $x^*$  —  $\varepsilon$ -оптимальный план задачи (1). Ветвление множества  $X$  на множества  $X_1, X_2$  приводит к аппроксимации в классе кусочно-постоянных функций

$$y = f_X^1(x) = \begin{cases} \xi(X_1), & x \in X_1, \\ \xi(X_2), & x \in X_2. \end{cases}$$

Продолжая процедуру метода ветвей и границ, получаем все более точные аппроксимации снизу функции  $f(x)$  в классе кусочно-постоянных функций.

Перейдем теперь к теме данного пункта. Пусть  $f(x) \in$

$\in C^{(1)}$ ,  $|\partial f(x)/\partial x| \leq L < \infty$ . Обобщая описанную схему метода ветвей и границ, будем аппроксимировать функцию  $f(x)$  снизу в классе непрерывных кусочно-линейных функций. Возьмем любую точку  $x^1 \in X$ .

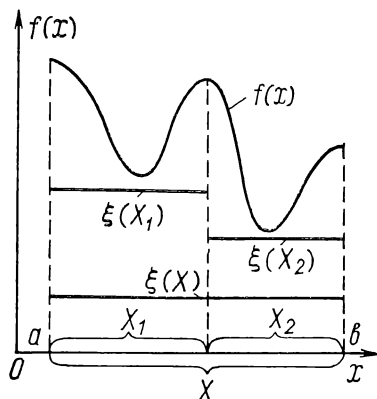


Рис. IV.10

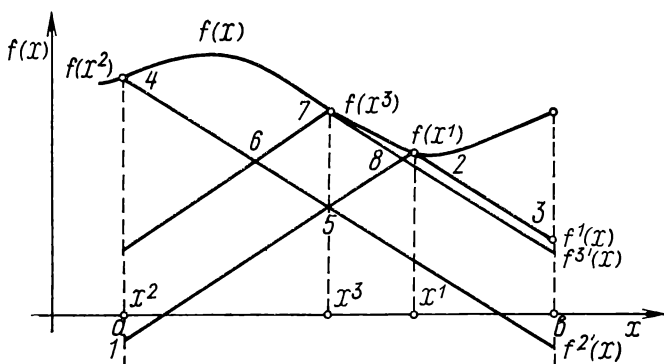


Рис. IV.11

В качестве  $x^1$  можно взять план, рекомендованный специалистами как оптимальный в задаче (1). Построим функцию

$$f^1(x) = \begin{cases} f(x^1) + L(x - x^1), & x \in [a, x^1], \\ f(x^1) - L(x - x^1), & x \in ]x^1, b]. \end{cases}$$

Функция  $f^1(x)$  является кусочно-линейной аппроксимацией снизу функции  $f(x) : f^1(x) \leq f(x)$ ,  $x \in X$ . На рис. IV.11 она изображена ломаной  $\{1, 2, 3\}$ .

Пусть  $x^2$  — точка минимума функции  $f^1(x): f^1(x^2) = \min f^1(x)$ ,  $x \in X$ . Если для некоторого  $x^* \in X$  выполняется неравенство  $f(x^*) \leq f^1(x^2) + \varepsilon$ , то  $x^*$  —  $\varepsilon$ -оптимальный план задачи (1). При неудовлетворительных значениях  $\varepsilon$  процесс решения продолжаем. Второе приближение снизу строим по формуле

$$f^2(x) = \max \{f^1(x), f^{2'}(x)\}, \quad (2)$$

где

$$f^{2'}(x) = \begin{cases} f(x^2) + L(x - x^2), & x \in [a, x^2], \\ f(x^2) - L(x - x^2), & x \in ]x^2, b]. \end{cases}$$

На рис. IV.11 функция  $f^2(x)$  изображена ломаной  $\{4, 5, 2, 3\}$ . Найдем точку  $x^3: f^2(x^3) = \min f^2(x)$ ,  $x \in X$ . Если для некоторого  $x^* \in X$  выполняется неравенство  $f(x^*) \leq f^2(x^3) + \varepsilon$ , то  $x^*$  —  $\varepsilon$ -оптимальный план. Иначе — по точке  $x^3$  строится следующая аппроксимация:  $f^3(x) = \max \{f^2(x), f^{3'}(x)\}$ ,  $x \in X$ , где

$$f^{3'}(x) = \begin{cases} f(x^3) + L(x - x^3), & x \in [a, x^3], \\ f(x^3) - L(x - x^3), & x \in ]x^3, b]. \end{cases}$$

На рис. IV.11 ломаная  $\{4, 6, 7, 8, 2, 3\}$  представляет функцию  $f^3(x)$ .

С каждой итерацией  $s$  точность аппроксимации увеличивается и строятся планы  $x^s$ , все более и более приближающиеся по значениям  $f(x)$  к глобально оптимальному плану задачи (1). Основная операция на итерации — минимизация кусочно-линейных функций типа (2). Подобные задачи сводятся к задачам линейного программирования (§ 1 гл. I). Однако в данном случае точки минимума  $x^2, x^3, \dots$  находятся с помощью элементарных вычислений.

Описанная схема допускает дальнейшее обобщение. Для функций  $f(x)$ ,  $|\partial f(x)/\partial x| \leq L$ ,  $|\partial^2 f(x)/\partial x^2| \leq C$ , приближения можно строить в классе кусочно-квадратичных функций (*сплайны второго порядка*).

Предлагается самостоятельно разработать модификацию описанного метода, использующую дополнительно кусочно-линейные мажоранты минимизируемой функции.

**2. Методы поиска точек минимума унимодальных функций.** Непрерывную функцию  $f(x)$ ,  $x \in R_1$ , называют *унимодальной* на отрезке  $[a, b]$ , если существует такая точка  $x^* \in [a, b]$ , что на отрезке  $[a, x^*]$  функция  $f(x)$  убыв-

вает, на отрезке  $[x^*, b]$  — возрастает (рис. IV.12). Пример унимодальной функции — строго выпуклая функция. Поскольку в окрестности точки минимума функции  $f(x) \in C^{(2)}$  часто выполняется достаточное условие строгой выпуклости  $\partial^2 f(x^0)/\partial x^2 > 0$ , то проблема построения эффективных методов минимизации унимодальных функций актуальна в нелинейном программировании.

Основное свойство унимодальных функций, используемое при поиске точек минимума, состоит в том, что вычисление любых двух значений  $f(x^1), f(x^2)$ ,  $x^1 \neq x^2$ ,  $x^1, x^2 \in [a, b]$ , позволяет уменьшить интервал локализации  $[a, b]$

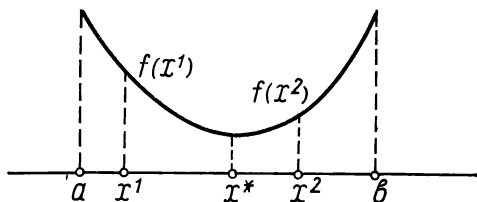


Рис. IV.12

точки минимума  $x^*$ . Легко проверить (рис. IV.12), что в случае  $f(x^1) > f(x^2)$ ,  $x^1 < x^2$ , обязательно  $x^* \in [x^1, b]$ . Если же  $f(x^1) < f(x^2)$ ,  $x^1 < x^2$ , то  $x^* \in [a, x^2]$ .

Обозначим через  $\Delta_k(f)$  длину интервала локализации точки минимума после вычисления значений функции  $f(x)$  в точках  $x^1, x^2, \dots, x^k$  исходного интервала  $[a, b]$ . *Оптимальным поиском* называется такой способ построения точек  $x^1, x^2, \dots, x^k$ , для которого минимально число

$$\Delta_k = \sup \Delta_k(f),$$

где верхняя грань вычисляется по всем унимодальным функциям  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Алгоритм оптимального поиска основан на решении следующей задачи.

**Задача.** Для каждого  $k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) указать наибольшую длину  $F_k$  отрезка и такой способ выбора  $k$  точек на нем, чтобы по вычислениям функции  $f(x)$  в этих точках можно было локализовать точку минимума в единичном интервале.

**Теорема.**  $F_k$  есть  $k$ -е число Фибоначчи, т. е.

$$F_0 = F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k \geq 2.$$

Доказательство. Без единого вычисления или с помощью только одного вычисления функции  $f(x)$  основное свойство унимодальных функций не позволяет уменьшить интервал локализации точки минимума. Поэтому  $F_0 = F_1 = 1$ . Предположим, что теорема доказана для всех  $k = 2, 3, \dots, s$ . Докажем ее для  $k = s + 1$ . Рассмотрим отрезок  $[0, L]$ ,  $L > F_s$ . Вычислим  $f(x^1)$ ,  $f(x^2)$  в двух произвольно взятых точках  $x^1, x^2$ :  $0 < x^1 < x^2 < L$ . По этим вычислениям согласно основному свойству унимодальных функций можно точно указать интервал лока-

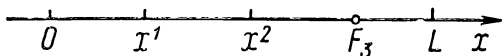


Рис. IV.13

лизации точки минимума. Им окажется один из отрезков  $[0, x^2]$ ,  $[x^1, L]$  (рис. IV.13).

Рассмотрим случай  $x^0 \in [0, x^2]$ . Поскольку вычисление  $f(x)$  в точке  $x^1$  будет использовано еще на последующих итерациях, можно считать, что интервал локализации  $[0, x^2]$  получен после одного вычисления. Для локализации точки минимума используем  $s + 1$  вычисление. После вычисления  $f(x^2)$  осталось  $s$  вычислений. Поэтому длина отрезка  $[0, x^2]$  не может превзойти  $F_s$ :

$$x^2 \leq F_s. \quad (3)$$

Точка  $x^2$  для отрезка  $[0, L]$  играет такую же роль, как и точка  $x^1$  для отрезка  $[0, x^2]$  на следующей итерации, т. е. после проведения двух вычислений из возможных  $s + 1$  вычислений. Поэтому длина отрезка  $[0, x^1]$ , который может оказаться интервалом локализации для  $s - 1$  вычисления, не больше  $F_{s-1}$ :

$$x^1 \leq F_{s-1}. \quad (4)$$

Перейдем ко второму возможному случаю:  $x^0 \in [x^1, L]$ . Рассуждая аналогично предыдущему, вместо (3), (4) получаем неравенства

$$L - x^1 \leq F_s, \quad L - x^2 \leq F_{s-1}. \quad (5)$$

Из определения числа  $F_{s+1}$  следует, что оно равно верхней грани чисел  $L$ , для которых выполняются нера-

венства (3)—(5) при некоторых  $x^1, x^2 \in [0, L], x^1 < x^2$ . Согласно (4), (5) имеем

$$L \leq F_s + x_1 \leq F_s + F_{s-1}.$$

С другой стороны, при  $L = F_s + F_{s-1}, x^1 = F_{s-1}$ , по предположению индукции, точку минимума из  $[0, x^1]$  можно локализовать в единичном интервале за  $s$  вычислений функции  $f(x)$ , поэтому  $F_{s+1} = F_s + F_{s-1}$ . Теорема доказана.

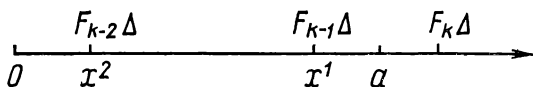


Рис. IV.14

Из теоремы следует *метод оптимального поиска (метод Фибоначчи)*. Пусть  $\Delta$  — заданная длина интервала локализации точки минимума функции  $f(x), x \in [0, a]$ . Во вспомогательной задаче рассматривался единичный интервал локализации, поэтому изменим масштаб на оси  $ox$  в  $t = a/\Delta$  раз. По числу  $t$  найдем такое число Фибоначчи  $F_k$ , что  $F_{k-1} < t \leq F_k$ . Другими словами, по отрезку  $[0, a]$  построим начальный интервал локализации  $[\alpha_0, \beta_0] = [0, F_k\Delta]$  длиной  $\Delta_0 = F_k\Delta$  (рис. IV.14), считая, что функцию  $f(x)$  можно доопределить на  $[0, F_k\Delta]$ , не потеряв свойства унимодальности. Согласно теореме точки  $F_{k-1}\Delta, F_{k-2}\Delta$  на отрезке  $[0, F_k\Delta]$  расположены так, что  $F_k\Delta = F_{k-1}\Delta + F_{k-2}\Delta$  (рис. IV.14). Вычислим значения функции  $f(x)$  в точках  $x^1 = F_{k-1}\Delta, x^2 = F_{k-2}\Delta$  и выделим первый интервал локализации  $[\alpha_1, \beta_1]$ . Согласно основному свойству унимодальных функций получаем

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = x^1, \text{ если } f(x^1) > f(x^2),$$

$$\alpha_1 = x^2, \beta_1 = \beta_0 = F_k\Delta, \text{ если } f(x^1) \leq f(x^2).$$

В обоих случаях длина  $\Delta_1$  интервала локализации равна  $\Delta_1 = \Delta_0 - F_{k-2}\Delta$ .

Пусть  $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$  — интервал локализации, полученный после построения точки  $x^s, 2 \leq s < k$ . Вычислим  $\Delta x_{k-1} = F_{k-s-1}\Delta$ . Построим точку  $x^{s+1} = \alpha_{s-1} + \Delta x_{k-1}$ . Возможны два типа расположения точек на  $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$  (рис. IV.15).

Вычислив  $f(x^{s+1})$  по двум значениям функции  $f(x)$



на внутренних точках отрезка  $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$ , выделим новый интервал локализации  $[\alpha_s, \beta_s]$ :

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_{s-1}, \beta_s = x^s, \text{ если } \beta_{s-1} = x^{s-1}, f(x^s) > f(x^{s+1}), \\ \alpha_s &= \alpha_{s-1}, \beta_s = x^{s-1}, \text{ если } \alpha_{s-1} = x^s, f(x^{s-1}) > f(x^{s+1}), \\ \alpha_s &= x^{s+1}, \beta_s = \beta_{s-1}, \text{ если } \beta_{s-1} = x^{s-1}, f(x^s) \leq f(x^{s+1}), \\ \alpha_s &= x^{s+1}, \beta_s = \beta_{s-1}, \text{ если } \alpha_{s-1} = x^s, f(x^{s-1}) \leq f(x^{s+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

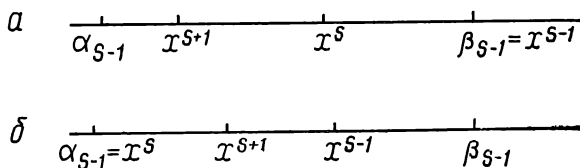


Рис. IV.15

Длина  $\Delta_s$  нового интервала локализации равна  $\Delta_s = \Delta_{s-1} - F_{k-s-1}\Delta$ . Продолжая процесс, построим точку  $x^h$  и интервал локализации  $[\alpha_{h-1}, \beta_{h-1}]$  длиной  $\Delta_{h-1} = \Delta_{h-2} - F_1\Delta = F_0\Delta + \Delta_{h-2} - F_2\Delta = \Delta + \Delta_{h-3} - F_3\Delta = \dots = \Delta + \Delta_0 - F_h\Delta = \Delta$ . Таким образом, с помощью  $k$  вычислений функции  $f(x)$  точка минимума  $x^0$  локализована в интервале  $[\alpha_{h-1}, \beta_{h-1}]$  длиной  $\Delta$ , т. е. найдена с заданной точностью до  $\Delta$ .

**Пример.** Найти с точностью  $\Delta = 0,1$  точку минимума функции  $f(x) = -x + 3x^2 - 0,01x^3$ ,  $x \in [0, 1]$ . Поскольку  $\partial^2 f / \partial x^2 = 6 - 0,06x > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , то рассматриваемая функция унимодальна на  $[0, 1]$ . Следуя методу Фибоначчи, вычислим  $t = 1/0,1 = 10$ . Поскольку  $8 = F_5 < 10 < F_6 = 13$ , то  $k = 6$ , т. е. задачу можно решить с помощью вычислений функции  $f(x)$  в шести точках (функция  $f(x)$  унимодальна на  $[0; 1, 3]$ ). Подсчитаем  $F_4\Delta = 8 \cdot 0,1 = 0,8$  и построим точки  $x^1 = \alpha_0 + 0,8 = 0,8$ ,  $x^2 = \beta_0 - 0,8 = 0,5$ . Поскольку  $f(0,8) = 1,11488 > f(0,5) = 0,24875$ , то  $[\alpha_1, \beta_1] = [0; 0,8]$ . Подсчитаем  $F_3\Delta = 3 \cdot 0,1 = 0,3$ . Построим  $x^3 = \alpha_1 + 0,3 = 0,3$  и вычислим  $f(x^3) = -0,03081 < f(x^2)$ . Следовательно,  $[\alpha_2, \beta_2] = [0; 0,5]$ . Подсчитаем  $F_2\Delta = 0,2$ ,  $x^4 = 0,2$ ,  $f(x^4) = -0,08008 < f(x^3)$ . Таким образом,  $[\alpha_3, \beta_3] = [0; 0,3]$ . Подсчитаем  $F_1\Delta = 0,1$ ,  $x^5 = 0,1$ ,  $f(x^5) = -0,90708 < f(x^4)$ , тогда  $[\alpha_4, \beta_4] = [0; 0,2]$ . Подсчитаем  $F_0\Delta = 0,1$ ,  $x^6 = 0,1$ . Точка минимума локализована на отрезке  $[0,1; 0,2]$ .

Второй популярный метод поиска точки минимума унимодальной функции — *метод золотого сечения*. Как отмечено выше, при локализации точки минимума с помощью двух вычислений  $f(x^1)$ ,  $f(x^2)$  (рис. IV.12) в новом

интервале локализации будет находиться одна из точек  $x^1, x^2$ . Поэтому при следующей локализации достаточно вычислить лишь одно значение  $f(x^3)$ . Для того чтобы на каждой итерации однотипным способом строить дополнительную точку, точки  $x^1, x^2$  выбираем так, чтобы длина отрезка  $[a, x^1]$  так относилась к длине отрезка  $[a, b]$ , как длина отрезка  $[x^1, x^2]$  к длине отрезка  $[a, x^2]$  («золотое сечение» отрезка  $[a, b]$ ):

$$\frac{x^1 - a}{b - a} = \frac{x^2 - x^1}{x^2 - a}. \quad (7)$$

Поскольку алгоритм рассчитан на все унимодальные функции, то из соображения симметрии следует положить

$$x^1 - a = b - x^2, \quad (8)$$

т. е. точки  $x^1, x^2$  построить на одинаковых расстояниях от концов отрезка  $[a, b]$ .

Из уравнений (7), (8) получаем

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a) = a + 0,3817 (b - a).$$

Таким образом, алгоритм метода золотого сечения состоит в следующем. По заданным  $f(x)$ ,  $[a, b]$  находим  $\Delta x_0 = 0,38(b - a)$ ,  $x^1 = a + \Delta x_0$ ,  $x^2 = b - \Delta x_0$  и вычисляем  $f(x^1)$ ,  $f(x^2)$ . Если  $f(x^1) < f(x^2)$ , то следующий интервал локализации  $[\alpha_1, \beta_1]$  имеет вид  $[a, x^2]$ . При  $f(x^1) \geq f(x^2)$  точка минимума будет находиться на отрезке  $[\alpha_1, \beta_1] = [x^1, b]$ . Пусть  $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$  — интервал локализации после построения точки  $x^s$ . Вычислим  $\Delta x_{s-1} = 0,38(\beta_{s-1} - \alpha_{s-1})$  и положим  $x^{s+1} = \alpha_{s-1} + \Delta x_{s-1}$ . Крайние точки нового интервала локализации  $[\alpha_s, \beta_s]$  найдем по формулам (6).

Метод золотого сечения является *асимптотически оптимальным* в том смысле, что отношение  $\Delta_{s+1}/\Delta_s$  длин интервалов локализации в оптимальном поиске при  $s \rightarrow \infty$  стремится к числу  $\approx 0,62$ , равному отношению длин соседних интервалов локализации в методе золотого сечения (докажите!).

В примере, рассмотренном выше, начальный интервал локализации нужно уменьшить в десять раз. Количество вычислений  $k$  функций, достаточных для этого в методе золотого сечения, удовлетворяет неравенству  $0,62^{k-1} \leq 0,1$ , т. е.  $k=6$ . Построение интервала локализации длиной 0,1 оставляется читателям.

Метод Фибоначчи, по построению, гарантирует заданную длину интервала локализации за минимальное число вычислений для самых «плохих» унимодальных функций, которые, возможно, почти не встречаются в приложениях. В силу этого для многих конкретных функций по эффективности с ним могут соперничать другие методы. В практических расчетах хорошо зарекомендовал себя следующий *метод локализации*, основанный на *квадратичных аппроксимациях* минимизируемой унимодальной функции  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Пусть  $x^1 \in [a, b]$  — начальное приближение,  $\Delta x > 0$  — длина шага (некоторое число).

Итерация алгоритма состоит из следующих шагов.

**Шаг 1.** Вычислить  $f(x)$  в начальной точке  $x^1$ . Если  $f(x^1 + \Delta x) < f(x^1)$ , то перейти к шагу 2. При  $f(x^1 + \Delta x) > f(x^1)$  положить  $\Delta x = -\Delta x$  и перейти к шагу 2.

**Шаг 2.** Вычислить  $x^{k+1} = x^k + \Delta x$ .

**Шаг 3.** Вычислить  $f(x^{k+1})$ .

**Шаг 4.** Если  $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$  ( $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$  при  $\Delta x = -\Delta x$ ), то положить  $\Delta x = 2\Delta x$  и перейти к шагу 2,  $k = k+1$ . Если  $f(x^{k+1}) > f(x^k)$  ( $f(x^{k+1}) < f(x^k)$  при  $\Delta x = -\Delta x$ ), то положить  $\Delta x = \Delta x/2$ , вернуться к шагам 2, 3,  $k = k+1$  и обозначить  $x^{k+1} = x^m$ ,  $x^{k+2} = x^{m-1}$ ,  $x^k = x^{m-2}$ ,  $x^{k-1} = x^{m-3}$  (в обратном порядке, если  $\Delta x = -\Delta x$ ). Расстояния между соседними точками  $x^{m-3}$ ,  $x^{m-2}$ ,  $x^{m-1}$ ,  $x^m$  будут одинаковы.

**Шаг 5.** Обозначим через  $\beta$  ту точку из четырех указанных, на которых функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение:  $f(\beta) = \min\{f(x^{m-3}), f(x^{m-2}), f(x^{m-1}), f(x^m)\}$ . Из точек  $x^{m-3}$ ,  $x^m$  удалим ту, которая расположена дальше от  $\beta$ . Оставшуюся тройку обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ;  $\alpha < \beta < \gamma$ .

**Шаг 6.** Вычислить

$$x^* = \beta + \Delta x[f(\alpha) - f(\gamma)]/2[f(\alpha) - 2f(\beta) + f(\gamma)],$$

где  $x^*$  — точка минимума параболы  $y = \xi x^2 + \zeta x + \eta$ , построенной по значениям  $\alpha$ ,  $f(\alpha)$ ,  $\beta$ ,  $f(\beta)$ ,  $\gamma$ ,  $f(\gamma)$ .

**Шаг 7.** Если  $|x^* - \beta| \leq \Delta$  или  $|f(x^*) - f(\beta)| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная точность приближения по целевой функции, то закончить поиск. В противном случае вычислить  $f(x^*)$  и среди точек  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  исключить одну, так, чтобы не потерять интервал локализации и чтобы значение функции  $f(x)$  на исключенной точке было наибольшим. Перейти к шагу 6.

Цель первых четырех шагов состоит в грубой локализации точки минимума: точки  $x^1, x^2, \dots$  строятся с удваивающимся шагом до тех пор, пока впервые не встретится участок возрастания функции  $f(x)$ . После этого отбираются четыре последние точки для более точной локализации с помощью основного свойства унимодальных функций. Последующие операции связаны только с квадратичными аппроксимациями функции  $f(x)$  по трем «лучшим» точкам  $\alpha, \beta, \gamma$  (шаги 5, 6).

Для иллюстрации метода решим приведенный выше пример. Пусть  $x^1=0,5$ ,  $\Delta x=0,1$ . Поскольку  $f(0,5)=0,24875 < f(0,6)=0,47784$ , то  $x^2=x^1-\Delta x=0,4$  и вычислим  $f(x^2)=0,07936 < f(x^1)$ . Положим  $x^3=x^1-2\Delta x=0,3$ . Имеем  $f(x^3)=-0,03081 < f(x^2)$ . Пусть  $x^4=x^1-4\Delta x=0,1$ , тогда  $f(x^4)=-0,90708 < f(x^3)$ . Положим  $x^5=0$ . Имеем  $f(x^5)=0 > f(x^4)$ . По точкам  $x^5=0$ ;  $x^4=0,1$ ;  $x^3=0,3$ ;  $x^2=0,4$  найдем  $\beta=0,1$ . Удалим точку  $x^2=0,4$ . По точкам  $\alpha=x^5$ ,  $\beta=x^4$ ,  $\gamma=x^3$  и значениям  $f(x)$  в них построим точку  $x^*=0,1+0,1[0+0,03081]/2[1,81416- -0,03081]=0,1000863$ . Поскольку  $|x^*-\beta| < 0,1$ , то процесс решения останавливаем на точке  $x^*$ .

### § 3. Методы безусловной минимизации

Самостоятельное (отдельное) изучение численных методов решения задач безусловной минимизации (§ 2 гл. III) оправдано не только тем, что эти задачи достаточно распространены в приложениях и методы их решения заметно проще методов решения задач минимизации с ограничениями, но и тем, что в последние годы возрос интерес к методам (в частности, к итеративным, § 4), в которых общие экстремальные задачи так или иначе сводятся к задаче безусловной минимизации.

**1. Аппроксимация функций.** Наиболее естественная и широко используемая идея решения нелинейных задач состоит в *аппроксимации задач*, которая основана на аппроксимации элементов этих задач.

В задаче безусловной минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R_n, \quad (1)$$

единственным элементом является целевая функция  $f(x)$ .

Пусть  $f(x) \in C^{(1)}$ ,  $x \in R_n$ . Функция

$$f_1(x; x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \partial f(x^*) / \partial x \quad (2)$$

в окрестности точки  $x=x^*$  совпадает с  $f(x)$  с точностью до  $o(\|x-x^*\|)$  ( $|f(x) - f_1(x; x^*)| \leq o(\|x-x^*\|)$ ), что служит основанием называть ее *аппроксимацией первого по-*

рядка (линейной аппроксимацией) функции  $f(x)$  в точке  $x^*$ .

Если  $f(x) \in C^{(2)}$ ,  $x \in R_n$ , то функцию

$$f_2(x; x^*) = f(x^*) + (x - x^*)' \partial f(x^*) / \partial x + \\ + (x - x^*)' [\partial^2 f(x^*) / \partial x^2] (x - x^*) / 2 \quad (3)$$

называют аппроксимацией второго порядка (квадратичной аппроксимацией) функции  $f(x)$  в точке  $x^*$ , поскольку  $|f(x) - f_2(x; x^*)| \leq o(\|x - x^*\|^2)$ .

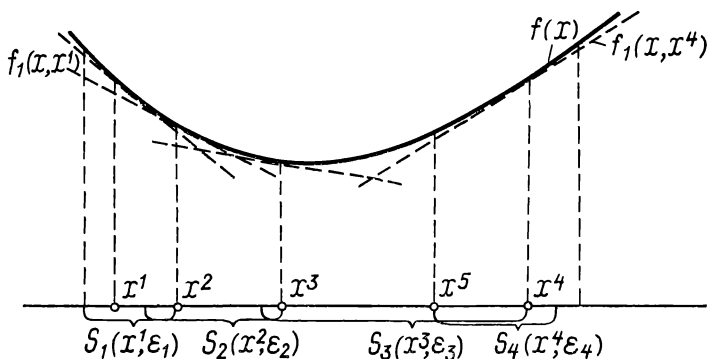


Рис. IV.16

Функции (2), (3), основанные на рядах Тейлора, не являются единственно возможными линейной и квадратичной аппроксимациями, но изучение других способов аппроксимации выходит за рамки данного пособия.

**2. Методы первого порядка.** *Линейной аппроксимацией задачи (1)* назовем последовательность задач

$$f_1(x^{k+1}; x^k) = \min f_1(x; x^k), \quad x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \\ k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

в которой начальный вектор  $x^1$  и  $\varepsilon_k$ -окрестности  $s_k(x^k, \varepsilon_k)$  векторов  $x^k$  являются параметрами аппроксимации. Конкретный выбор параметров аппроксимации задает реализацию метода решения задачи (1). Параметры аппроксимации могут выбираться и настраиваться перед началом решения и в процессе его.

Векторы  $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , построенные согласно (4), интерпретируются как последовательные приближения оптимального плана задачи (1). На рис. IV.16 приведена

геометрическая иллюстрация метода (4). В большинстве конкретных реализаций окрестности  $s_k(x^k, \varepsilon_k)$  формируются следующим образом. Последовательные приближения строятся в виде

$$x^{k+1} = x^k + \Theta_k l^k, \quad (5)$$

где  $n$ -вектор  $l^k$  называют направлением в точке  $x^k$ , число  $\Theta_k$  — шагом вдоль направления  $l^k$ . Для построения окрестности  $s_k(x^k, \varepsilon_k)$  задают сначала нормированную окрестность с помощью неравенства  $S_k(l, x^k) \leq 1$  для векторов  $l$ , а затем с помощью преобразования подобия  $\Theta_k l$  получают множество  $s_k(x^k, \varepsilon_k)$ .

Из (4), (5) получается следующая задача для построения векторов  $l^k$ :

$$f_1(l^k; x^k) = \min f_1(l; x^k), \quad S_k(l, x^k) \leq 1. \quad (6)$$

Здесь  $f_1(l; x^k) = l' \partial f(x^k) / \partial x$ . Предполагается, что нормировочные функции  $S_k(l, x^k)$  таковы, что задача (6) имеет решение для любых  $x^k$ .

Для одношаговых дискретных методов первого порядка невозможно указать правило построения функций  $S_k(l, x^k)$ , которое было бы предпочтительнее других способов, если нет дополнительной информации о поведении функции  $f(x)$ . Для точки  $x^k$ , отличной от оптимального плана  $x^0$ , по любому направлению  $l^k$  можно указать такую нормировочную функцию  $S_k(l, x^k)$ , чтобы вектор  $l^k$  был решением задачи (6).

В конкретных реализациях метода (5), (6), когда имеется некоторая информация о минимизируемой функции  $f(x)$ , используются специальные нормировочные функции. Например, если есть основания считать, что в окрестности оптимального плана  $x^0$  множества уровня  $\{x: f(x) \leq c\}$  близки к эллипсоидам (рис. IV.17), целесообразно в качестве нормировочной функции брать квадратичную строго выпуклую функцию

$$S_k(l, x^k) = l' D l + d' l, \quad D = D(x^k) > 0. \quad (7)$$

В этом случае для квадратичной функции  $f(x)$  с  $\partial f(0) / \partial x = d$ ,  $\partial^2 f(0) / \partial x^2 = D/2$  решение  $l^k$  задачи (6) ведет из  $x^k$  в  $x^0 = x^k + l^k$ . При  $D = E$ ,  $d = 0$  использование в задаче (6) нормировочной функции (7) приводит к направлению  $l^k = -\Theta \text{grad } f(x^k)$ ,  $\Theta > 0$ , антиградиента функции  $f(x)$  в точке  $x^k$ . Численные методы, основанные на таких

направлениях, называются *градиентными* (точные их описания будут даны ниже).

Движение вдоль антиградиента ведет из любой точки  $x^h$  в точку минимума, если множествами уровня являются сферы (рис. IV.18). Поэтому естественна мысль ввести такое неособое преобразование  $x=Cy$ , чтобы множест-

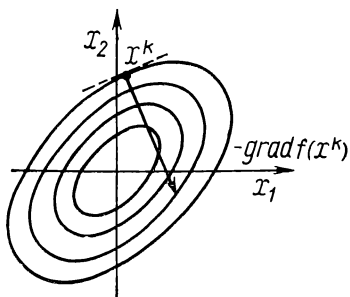


Рис. IV.17

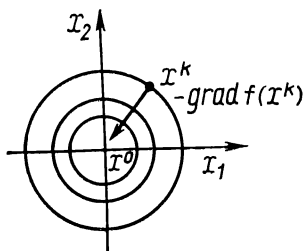


Рис. IV.18

вами уровня функции  $\varphi(y)=f(Cy)$  были сферы. Для квадратичных функций

$$f(x) = x'Dx + d'x + \delta, \quad D > 0, \quad (8)$$

достаточно положить  $C=D^{1/2}$ . Однако это преобразование предполагает известной матрицу  $2D=\partial^2 f/\partial x^2$  вторых производных функции  $f(x)$  и поэтому не может быть использовано в одношаговых методах минимизации первого порядка. В многошаговых методах с помощью предыдущих приближений  $x^{h-s}, x^{h-s+1}, \dots, x^h$  удастся построить матрицы  $C_k$ , аппроксимирующие матрицу  $C: C_k \rightarrow C$  при  $k \rightarrow \infty$ . Подобные методы, называемые методами *переменной метрики*, позволяют существенно улучшить характеристики градиентных методов. Основной недостаток одношаговых градиентных методов проявляется уже для функций (8) с плохо обусловленной матрицей  $D$  (рис. IV.19). В последовательных точках  $x^h, x^{h+1}$  градиенты этой функции имеют большие нормы, очень чувствительны к точности вычислений  $x^h, x^{h+1}$ , почти перпендикулярны к направлению к точке минимума  $x^0$ . Все это затрудняет решение задачи (1).

В общем случае функции, у которых наблюдаются подобные явления, называют *функциями с овражной*

структурой ( $0x_1$  — «дно оврага» — направление медленного движения, которое в общем случае криволинейно). Один из способов защиты методов от отрицательного влияния овражной структуры — усреднение последовательных градиентов.

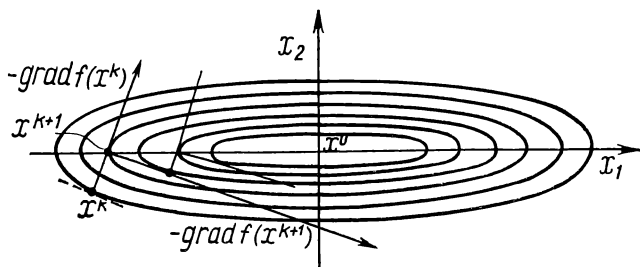


Рис. IV.19.

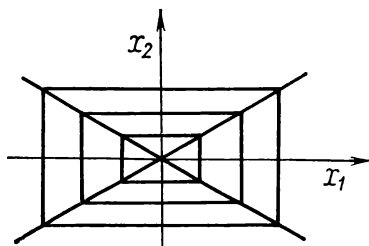


Рис. IV.20

В качестве упражнения предлагается исследовать нормировочные функции

$$S_k(l; x^k) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n d_{ij} l_j - d_j \right|, \quad (9)$$

$$S_k(l; x^k) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n d_{ij} l_j - d_i \right|, \quad (10)$$

порожденные двумя видами норм, распространенных в вычислениях. Нормировочное условие типа (9) целесообразно вводить, если множества уровня функции  $f(x)$  близки к виду, изображенному на рис. IV.20.

Введение нормировочных функций позволяет задачу



подбора параметров — окрестностей  $s_h(x^h, \varepsilon_h)$  — свести к задаче подбора числовых параметров  $d_{ij}(x^h)$ ,  $d_j(x^h)$  нормировочных функций  $S_h(l, x^h)$ . Существует ряд эвристических методов построения функций  $d_{ij}(x^h)$ ,  $d_j(x^h)$ , но все они используют дополнительную информацию, не доступную в одношаговых методах первого порядка.

Приведенный анализ показывает, что в одношаговых методах первого порядка, рассчитанных на минимизацию обширных классов сложных функций с труднообозримой

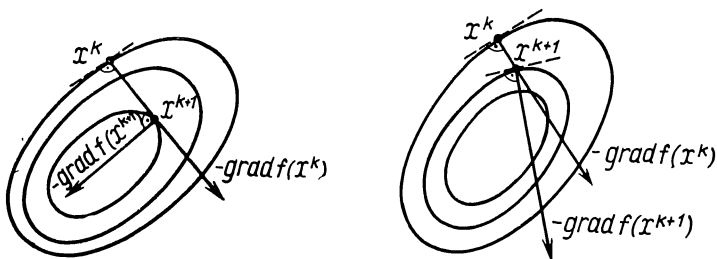


Рис. IV.21

структурой, разумен следующий метод: для точки  $x^h$  выбирается случайное направление  $l^h$ ,  $\|l^h\|=1$ , вычисляется  $f(x^h + \Theta l^h)$  с достаточно малым числом  $\Theta > 0$ . Если  $f(x^h + \Theta l^h) > f(x^h)$ , то направление  $l^h$  заменяется на  $-l^h$ . При  $x^h \neq x^0$ ,  $\text{grad } f'(x^h) \neq 0$ , вектор  $l^h$  (или  $-l^h$ ) задает направление спуска (подходящее направление).

Перейдем ко второй задаче, возникающей при формировании окрестности  $s_h(x^h, \varepsilon_h)$  в задаче аппроксимации (4), — к выбору величины шага  $\Theta_h$  вдоль направления  $l^h$ . При решении этой задачи используются три способа построения шага  $\Theta_h$ : 1)  $\Theta_h \equiv \Theta > 0$ ; 2)  $f(x^h + \Theta_h l^h) = \min_{\Theta \geq 0} f(x^h + \Theta l^h)$ ; 3)  $f(x^h + \Theta_h l^h) - f(x^h) \leq \varepsilon \Theta_h \text{grad } f'(x^h) l^h$ ,  $\varepsilon$  — заданное число,  $0 < \varepsilon < 1$ . Первый способ наиболее простой. В совокупности с  $l^h = -\text{grad } f(x^h)$  он образует *градиентный метод* минимизации функции  $f(x)$ . Второй способ в точности практически не осуществим, ибо задача минимизации даже по скалярному аргументу (см. § 2) всегда решается только с определенной точностью. Если  $l^h = -\text{grad } f(x^h)$ , то метод (5) со вторым способом выбора шага  $\Theta_h$  называется *градиентным методом наискорейшего спуска*. На рис. IV.21 приведена геометрическая

иллюстрация двух последних методов. Выбор шага  $\Theta_k$  по третьему способу достигается, например, последовательным дроблением произвольного числа  $\Theta > 0$ .

**3. Методы второго порядка.** Квадратичной аппроксимацией задачи (1) называется последовательность задач

$$f_2(x^{k+1}; x^k) = \min f_2(x; x^k), \quad x \in s_k(x^k, \varepsilon_k), \quad k=1, 2, \dots, \quad (11)$$

сформированных с помощью квадратичной аппроксима-

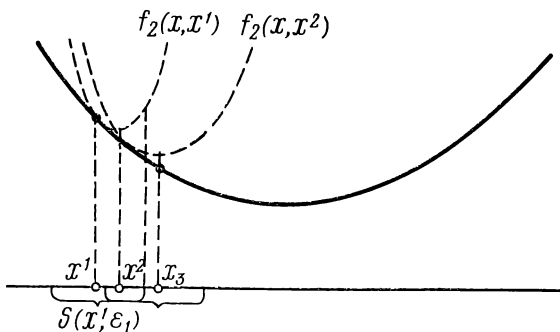


Рис. IV.22

ции целевой функции задачи (1). На рис. IV.22 приведена геометрическая иллюстрация построения последовательных приближений  $x^k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , согласно методу (11). Введя переменные  $l^k$ ,  $\Theta^k$ , удовлетворяющие соотношению (5), для построения направления  $l^k$  из (11) получим задачу

$$f_2(l^k; x^k) = \min f_2(l; x^k), \quad S(l; x^k) \leq 1, \quad (12)$$

где  $f_2(l; x^k) = l' \partial f(x^k) / \partial x + l' [\partial^2 f(x^k) / \partial x^2] l / 2$ . В неособом случае, когда

$$\partial^2 f(x) / \partial x^2 > 0 \quad (13)$$

в окрестности оптимального плана, задача (12) имеет решение без нормировочного условия. Только такой случай, следуя современным работам, будет рассматриваться далее. Решение  $l^k$  задачи

$$2 l' \partial f(x^k) / \partial x + l' [\partial^2 f(x^k) / \partial x^2] l \rightarrow \min, \quad l \in R_n,$$

согласно гл. III совпадает с единственным решением уравнения стационарности

$$b_k + A_k l = 0 \quad (b_k = \partial f / \partial x, \quad A_k = \partial^2 f / \partial x^2) \quad (14)$$

и имеет вид

$$l^k = -A_k^{-1} b_k. \quad (15)$$

Вектор (15) назовем *направлением Ньютона*. Нетрудно заметить, что это направление было уже получено в п. 1 для специальной нормировочной функции, основанной на информации, типичной для данного пункта. Напомним, что направление Ньютона  $l^k$  ведет из точки  $x^k$  в центр эллипса  $f_2(l; x^k) \leq f(x^k)$  (рис. IV.17).

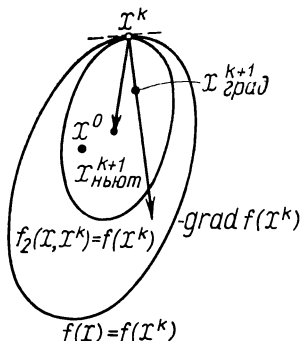


Рис. IV.23

При вычислении шага  $\Theta_k$  вдоль  $l^k$  для построения согласно (5) нового приближения  $x^{k+1}$  используются те же способы, что и в п. 1. Метод построения последовательных приближений по формуле (5), где  $l^k$  — направление Ньютона,  $\Theta_k \equiv 1$ ,

называется *методом Ньютона*. Согласно приведенному описанию по методу Ньютона за одну итерацию строится оптимальный план задачи (1), если функция  $f(x)$  квадратичная.

Разница между градиентным методом и методом Ньютона наглядно видна из рис. IV.23, где через  $x^{k+1}_{\text{град}}$ ,  $x^{k+1}_{\text{Ньюто}}$  обозначены приближения, построенные по градиентному методу и методу Ньютона,  $l^k$  — направление Ньютона.

Методы, в которых или  $\Theta_k \neq 1$ , или направление  $l^k$  строится без использования  $A_k^{-1}$ , или вместо направления Ньютона  $l_k$  используются векторы

$$l^k = -\tilde{A}_k^{-1} \tilde{b}_k, \quad (16)$$

где  $\tilde{A}_k$ ,  $\tilde{b}_k$  — аппроксимации матрицы  $A_k$  и вектора  $b_k$ , основанные на значениях  $f(x)$ ,  $\partial f(x) / \partial x$  из малой окрестности точки  $x^k$ , называются *методами ньютонковского типа*. Если  $\tilde{A}_k$ ,  $\tilde{b}_k$  строятся только по значениям  $f(x)$ ,

$\partial f(x)/\partial x$  на предыдущих приближениях  $x^{h-s}, x^{h-s+1}, \dots, x^h$ , то методы решения задачи (1) по формулам (5), (16) называются *квазиньютоновскими*. Распространены следующие типы построения аппроксимации  $\tilde{A}_h, \tilde{b}_h$  в квазиньютоновских методах: а)  $\tilde{A}_h \equiv \partial^2 f(x^1)/\partial x^2, \tilde{b}_h = b_h$ ; б)  $\tilde{A}_h$  аппроксимируется выражениями, составленными с помощью значений  $f(x), \partial f(x)/\partial x; \tilde{b}_h = b_h$  (*квазиньютоновские методы первого порядка*); в)  $\tilde{A}_h, \tilde{b}_h$  аппроксимируются только с помощью значений  $f(x)$  (*квазиньютоновские методы нулевого порядка*). Квазиньютоновские методы, по определению, многошаговые и являются, по существу, *методами переменной метрики* (см. п. 2).

**4. Метод сопряженных градиентов.** Особую популярность среди квазиньютоновских методов приобрел *метод сопряженных градиентов*, который послужил прототипом многих современных методов сопряженных направлений. Метод сопряженных градиентов есть метод первого порядка и основан на специальном методе решения уравнения (14), в котором матрица  $A_h$  явно не используется.

В вычислительных методах линейной алгебры показывается, что решение  $l^h$  уравнения (14) совпадает с вектором  $m^n$ , построенным по рекуррентным формулам

$$m^{s+1} = m^s + \alpha_s p^s, p^s = \beta_s p^{s-1} - \partial f_2(m^s; x^h)/\partial x, p^0 = -\partial f_2(m^0; x^h)/\partial x, m^0 \in R_n, s=0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\alpha_s = \frac{-p^{s'} \partial f_2(m^s; x^h)/\partial x}{p^{s'} [\partial f_2(m^s + p^s; x^h)/\partial x - \partial f_2(m^s; x^h)/\partial x]}, \quad (17)$$

$$\beta_s = \frac{\|\partial f_2(m^s; x^h)/\partial x\|^2}{\|\partial f_2(m^{s-1}; x^h)/\partial x\|^2}, \quad \|a\|^2 = a'a.$$

Поскольку в окрестности точки  $x=x^h$  функции  $f(x), f_2(x; x^h)$  достаточно близки, то в формулах (17) полагают  $f_2(x; x^h) = f(x)$  и метод (5) с  $l^h = m^n$  и  $\Theta_h$ , вычисленным по любому из трех указанных в п. 1 способов, называют *методом сопряженных градиентов*. Свое название этот метод получил по основному свойству градиентов  $\partial f_2(m^s; x^h)/\partial x, s=0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$[\partial f_2(m^s; x^h)/\partial x]' \partial f_2(m^t; x^h)/\partial x = 0, \quad 0 \leq t \leq s-1,$$

в силу которого направления  $p^s, s=0, 1, 2, \dots, n-1$ , *сопряжены* ( $\tilde{A}$ -ортогональны):

$$p^{s'} A p^t = 0, \quad 0 \leq t \leq s-1.$$

Это свойство послужило основой для построения многочисленных методов сопряженных (двойственных) направлений. Из описания метода сопряженных градиентов видно, что он является методом первого порядка.

**4\*. Сходимость и скорость сходимости методов первого и второго порядков.** Методы нулевого и первого порядков (особенно градиентные методы) просты в реализации. Для методов второго порядка требуется вычисление вторых производных, что в прикладных задачах часто или невозможно, или сопряжено с большими затратами. Однако такие общие данные не могут служить основанием для оценки качества методов при решении конкретных задач. До настоящего времени нет достаточно обоснованных правил выбора методов решения.

Если в методах первого порядка п. 2 окрестность  $s_h(x^k; \varepsilon_k)$  (нормировочная функция  $S_h(l; x^k)$ ) такова, что  $x^h(l=0)$  — внутренняя точка множества  $s_h(x^k, \varepsilon_k)$  (множества  $\{l: S_h(l, x^k) \leq 1\}$ ), то при  $\partial f(x^k)/\partial x \neq 0$  решение  $x^{h+1}(l^k)$  задачи (4) ((6)) обеспечивает спуск (релаксацию):  $f(x^{h+1}) < f(x)$ , если  $\varepsilon_k > 0$  ( $\Theta_k > 0$ ) достаточно мало. Направление Ньютона в методах второго порядка также обеспечивает спуск, ибо из определения  $l^k$  следует, что  $df(x^k + \Theta l^k)/d\Theta|_{\Theta=0} = l^{k'} \partial f(x^k)/\partial x + l^{k'} [\partial^2 f(x^k)/\partial x^2] l^k / 2 < 0$ . Наличие спуска на каждой итерации  $x^k \rightarrow x^{k+1}$  — важная характеристика описанных методов, позволяющих в конкретных задачах получить достаточно удовлетворительные результаты. Однако в общем случае оно не обеспечивает сходимости векторов  $x^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , к решению  $x^0$  задачи (1), т. е. сходимости рассматриваемых методов.

Основой теории сходимости вычислительных методов служит теория *устойчивости дискретных систем* (5). В рамках этой теории сходимость многих модификаций (например, методов ньютоновского типа, квазиньютоновских методов первого и нулевого порядков) можно трактовать как сохранение свойства устойчивости при возмущении дискретных систем. Немонотонная (см. п. 5) и вероятностная (см. п. 6) сходимости вычислительных методов имеют соответствующие аналоги в теории устойчивости. Поскольку эта тема выходит за рамки данного курса, то приведем лишь известные качественные результаты в этой области. Если  $f(x) \in C^{(1)}$ ,  $f(x) > -\infty$ ,  $\|\partial f(x)/\partial x - \partial f(y)/\partial y\| \leq L \|x - y\|$ , то последовательность  $x^k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , построенная согласно (5)  $l^k = -\text{grad } f(x^k)$ ,

обладает свойством  $\|\partial f(x^k)/\partial x\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Пусть дополнительно функция  $f(x) \in C^{(2)}$  удовлетворяет неравенствам

$$m\|l\|^2 \leq l' \partial^2 f(x)/\partial x^2 l \leq M\|l\|^2, M \geq m > 0. \quad (18)$$

Тогда указанная последовательность с линейной скоростью сходится к оптимальному плану  $x^0$ .

Методы ньютоновского типа с направлением Ньютона и шагом  $\Theta_k$ , найденным по третьему способу, для функции  $f(x) \in C^{(3)}$  со свойствами (18) и  $\|\partial^2 f(x)/\partial x^2 - \partial^2 f(y)/\partial x^2\| \leq L_1 \|x - y\|$  имеют квадратичную скорость сходимости.

При весьма общих условиях существующие квазиньютоновские методы имеют сверхлинейную скорость сходимости.

Из приведенных результатов видно, что использование дополнительной информации о функции  $f(x)$ , как и следовало ожидать, позволяет увеличить скорость сходимости методов. Выбор метода для минимизации конкретной функции зависит от многих причин. Общая рекомендация состоит в том, чтобы первые итерации строить методами нулевого или первого порядка, а затем в случае необходимости перейти к методам второго порядка.

Метод сопряженных градиентов, будучи методом первого порядка, по объему операций на итерации мало отличается от градиентных методов, но обладает сверхлинейной сходимостью. Следует, однако, отметить его большую чувствительность к ошибкам округления.

**5. Субградиентные методы.** В выпуклом программировании (гл. II) при минимизации недифференцируемых функций  $f(x)$  аналогом градиента является субдифференциал  $\partial f(x)$ , представляющий множество субградиентов  $c = c(x^*)$ , определенных в точке  $x^*$  неравенством

$$f(x) - f(x^*) \geq c'(x - x^*), x \in R_n.$$

Естественная мысль обобщить градиентные методы минимизации, заменив в них градиент на субградиент, хотя субградиент не обладает основным свойством градиента: при движении из  $x^*$  вдоль  $-c, c \in \partial f(x^*)$ , функция  $f(x)$  может и возрастать (рис. IV.24). Несмотря на это, при определенных условиях последовательные приближения, построенные по аналогии с градиентными методами  $x^{k+1} = x^k - \Theta_k c^k$ ,  $\Theta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$ , могут с-

даться. Точнее, если  $\|c(x)\| \leq L, \Theta_k \rightarrow 0, \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k = \infty$ , то

найдется такая подпоследовательность  $x^{k_s}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , что  $f(x^{k_s}) \rightarrow f(x^0)$ ,  $s \rightarrow \infty$ .

В отличие от градиентных методов вдоль подпоследовательности  $x^{k_s}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , функция  $f(x)$  не всегда убывает монотонно.

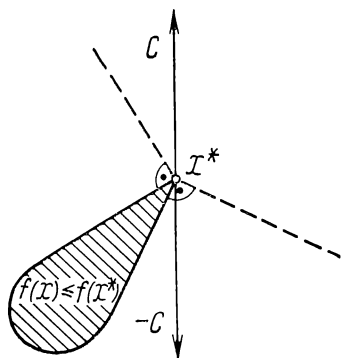


Рис. IV.24

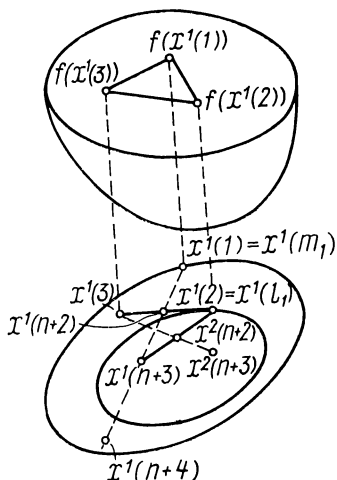


Рис. IV.25

**6. Метод стохастических градиентов.** Идею метода удобно объяснить на задаче

$$f(x) = \sum_{i=1}^N p_i f_i(x) \rightarrow \min,$$

где  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ ,  $f_i(x) \in C^{(1)}$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Число  $p_i$  можно интерпретировать как вероятность, с которой случайная величина  $\xi$  принимает значение  $f_i(x)$ . Тогда  $f(x)$  — математическое ожидание случайной величины  $\xi$ :  $f(x) = M\xi$ .

В градиентном методе минимизирующая последовательность строится по формуле

$$x^{k+1} = x^k - \Theta_k \sum_{i=1}^N p_i \text{grad } f_i(x^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Введем последовательность случайных векторов

$$y^{k+1} = y^k - \Theta_k \eta^k, \quad \Theta_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где  $\eta^k$  — случайный вектор, принимающий значение  $\text{grad } f_i(x^k)$  с вероятностью  $p_i$ .

Нетрудно видеть, что последовательности  $x^k$ ,  $y^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , связаны равенством  $x^k = My^k$ . Отличие между формулами (19), (20) состоит в том, что направление спуска в (19) представляет детерминированный вектор  $-\text{grad } f(x^k)$ , в (20) — случайный вектор  $-\eta^k$ . Поскольку

$$M\eta^k = \text{grad } f(x^k),$$

то вектор  $\eta^k$  называют *стохастическим градиентом функции  $f(x)$  в точке  $x^k$* .

Построение последовательности (20) проще, чем построение последовательности (19), и осуществляется по следующей схеме: на  $k$ -й итерации случайный механизм указывает реализацию  $f_{j(k)}(x)$  случайной величины  $\xi$ . Вычисляется  $\text{grad } f_{j(k)}(y^k)$  и делается шаг  $\Theta_k$  вдоль направления  $-\eta^k$ ,  $\eta^k = \text{grad } f_{j(k)}(y^k)$ . Таким образом, на каждой итерации используется градиент лишь одной компоненты функции  $f(x)$ .

В общем случае *стохастическим градиентом дифференцируемой функции  $f(x)$ ,  $x \in R_n$* , называется такой случайный вектор  $\eta$ , что  $M\eta = \text{grad } f(x)$ . Оказывается, что генерирование стохастических градиентов для сложных функций  $f(x)$  часто может быть проще вычисления их производных.

В связи с тем, что последовательные приближения  $y^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , (20) представляют случайные векторы, изменяется соответствующим образом и понятие сходимости\*). Приведем один результат: если  $M\|\eta^k\| \leq c$ ,

$\sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k = \infty$ ,  $\Theta_k \rightarrow 0$ , то вдоль некоторой последовательности  $y^{k_s}$ ,

$s = 1, 2, \dots$ , функция  $f(x)$  почти наверное сходится к  $f(x^0)$ .

**7. Метод деформируемого многогранника.** В приложениях, в частности, в *планировании экспериментов* широко используется следующий метод поиска, основанный

\*) Можно сказать и так: ослабление требований к сходимости приближений позволяет упростить операции по построению этих приближений.



на простой физической конструкции. В пространстве  $R_n$  выберем  $n+1$  точку  $x^1(1), x^1(2), \dots, x^1(n+1)$ . Точки  $\{x^1(1), f(x^1(1))\}, \{x^1(2), f(x^1(2))\}, \dots, \{x^1(n+1), f(x^1(n+1))\}$  в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $\{x, y\}$  интерпретируем как точки опоры на поверхности  $y=f(x)$  некоторого механизма — шагающего робота (рис. IV.25). Отметим среди точек «лучшую»  $x^1(l_1)$  и «худшую»  $x^1(m_1)$  по самой низкой и самой высокой опорам:  $f(x^1(l_1)) = \min f(x^1(i)), i = \overline{1, n+1}$ ;  $f(x^1(m_1)) = \max f(x^1(i)), i = \overline{1, n+1}$ . Найдем центр тяжести  $x^1(n+2)$   $n$  точек  $x^1(i), i = \overline{1, n+1}; i \neq m_1$ :

$$x^1(n+2) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^1(i) - x^1(m_1)) / n.$$

Построим точку

$$x^1(n+3) = x^1(n+2) + \alpha(x^1(n+2) - x^1(m_1)), \alpha > 0,$$

лежащую на луче из худшей точки  $x^1(m_1)$  в центр  $x^1(n+2)$  на расстоянии  $\alpha \|x^1(n+2) - x^1(m_1)\|$  от  $x^1(n+2)$  в сторону, противоположную от  $x^1(m_1)$ . Точка  $\{x^1(n+3), f(x^1(n+3))\}$  рассматривается как кандидат на новую опору вместо худшей опоры. Однако сначала при  $f(x^1(n+3)) \leq f(x^1(l_1))$  испытывается точка

$$x^1(n+4) = x^1(n+2) + \gamma(x^1(n+3) - x^1(n+2)), \gamma > 1,$$

еще более, чем  $x^1(n+3)$ , удаленная от  $x^1(n+2)$ . Если  $f(x^1(n+4)) < f(x^1(l_1))$ , то точка  $x^1(m)$  заменяется на  $x^1(n+4)$ , т. е. робот свою опору из худшей точки  $\{x^1(m_1), f(x^1(m_1))\}$  перемещает в точку  $\{x^1(n+4), f(x^1(n+4))\}$ , после чего операция повторяется с точками  $x^2(i) = x^1(i), i = \overline{1, n+1}, i \neq m_1, x^2(m_1) = x^1(n+4)$ .

Если  $f(x^1(n+4)) \geq f(x^1(l_1)) \geq f(x^1(n+3))$ , то  $x^1(m_1)$  заменяется на  $x^1(n+3)$ , т. е. робот перемещает опору из худшей точки в точку  $\{x^1(n+3), f(x^1(n+3))\}$ .

Может оказаться, что  $f(x^1(m_1)) \geq f(x^1(n+3)) > f(x^1(l_1))$ . Тогда опора из  $\{x^1(m_1), f(x^1(m_1))\}$  помещается в  $\{x^1(n+5), f(x^1(n+5))\}$ , где

$$x^1(n+5) = x^1(n+2) + \beta(x^1(m_1) - x^1(n+2)), 0 < \beta < 1,$$

т. е. точка  $x^1(n+5)$  выбирается на отрезке между точками  $x^1(n+2)$  и  $x^1(m_1)$ . Осталась не рассмотренной последняя возможность:  $f(x^1(n+3)) > f(x^1(m_1))$ . В этом случае все опорные точки сжимаются к лучшей точке

$x^1(l_1)$ , уменьшая вдвое свои расстояния до нее, т. е. рассматривается новая совокупность точек  $\overline{x^2(l_1)} = x^1(l_1)$ ,  $x^2(i) = x^1(l_1) + (x^1(i) - x^1(l_1))/2$ ,  $i \neq l_1$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , с которой начинаются операции новой итерации. Рекомендуется выбирать следующие значения параметров:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\gamma = 2$ .

Критерий останова

$$\sum_{i=1}^{n+1} [f(x^k(i)) - f(x^k(n+2))]^2 / (n+1) \leq \varepsilon^2,$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность приближений к  $x^0$  по значениям целевой функции;  $k$  — номер итерации.

## § 4. Методы условной минимизации

В вычислительных методах нелинейного программирования центральное место занимает проблема построения эффективных численных методов условной минимизации. Интерес к проблеме возрос в последние годы в связи с появлением *теории оптимального управления* (см. гл. VII) и интенсивным развитием вычислительной техники.

**1. Задачи с линейными ограничениями. Точные методы.** Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min, Ax = b, x \in Q, \quad (1)$$

где  $f(x)$  — скалярная целевая функция;  $A$  —  $m \times n$ -матрица;  $m \leq n$ ,  $\text{rang } A = m$ .

Следуя § 3, *линейной аппроксимацией задачи* (1) назовем последовательность задач

$$f_1(x^{k+1}; x^k) = \min f(x; x^k), Ax = b, x \in S_k(x^k, \varepsilon_k), \\ k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Строя последовательные приближения  $x^k$  по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \Theta_k l^k, k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

для  $l^k$  получим задачу

$$f_1(l^k; x^k) = \min f_1(l; x^k), Al = 0, S_k(l; x^k) \leq 1. \quad (4)$$

Если множество планов  $X = \{x: Ax = b, x \in Q\}$  — компакт, то задача (4) имеет решение для нормировочной функции  $S_k(l; x^k)$  с множеством  $\{l: S_k(l; x^k) \leq 1\}$  вида

$$x^k + l \in Q, \quad (5)$$

полученным из прямого ограничения задачи (1). Решение  $l^h$  задачи (4), (5) называется *условным антиградиентом функции  $f(x)$  в точке  $x^h$*  (рис. IV.26). Методы (3), в которых используются условные градиенты, а шаг  $\Theta_h$  выбирается одним из способов, указанным в § 3, и с уче-

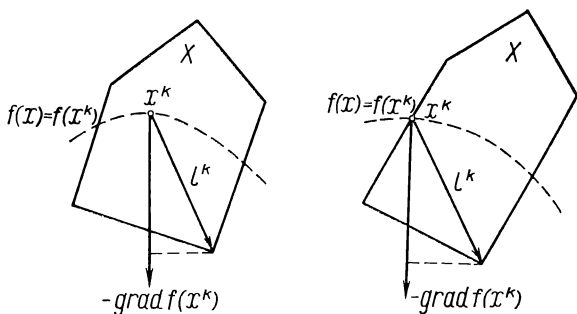


Рис. IV.26

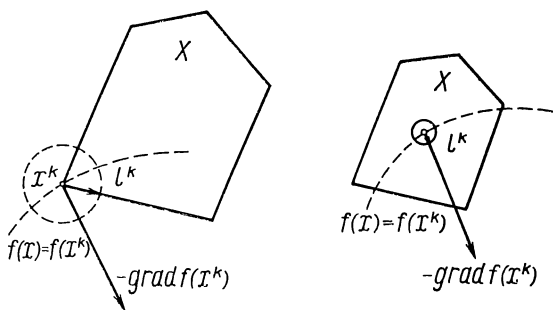


Рис. IV.27

том условия  $x^{h+1} = x^h + \Theta_h l^h \in Q$  называются *методами условного градиента*.

Рассмотрим задачу (4) для случая, когда множество  $\{l: S_h(l; x^h) \leq 1\}$  состоит из векторов  $l$ , удовлетворяющих неравенствам

$$l' l \leq \alpha, \quad l_j \geq 0, \quad \text{если } x_j^k = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Решение  $l^h$  задачи (4), (6) с достаточно малым  $\alpha > 0$  называется проекцией антиградиента  $-\text{grad } f(x^*)$  на

множество  $X$  (рис. IV.27). Исходя из (4), (6), легко получить формулы для вектора  $l^k$ . Вектор  $l^k$  по направлению совпадает с решением квадратичной задачи

$$f_1(l; x^k) + l'l/2 \rightarrow \min, Al = 0, l_j = 0, \text{ если } x_j^k = 0, j = \overline{1, n},$$

которая, как известно, сводится (см. гл. II) к задаче безусловной минимизации.

Методы (3), в которых в качестве  $l^k$  используются проекции антиградиента, а шаг  $\Theta_k$  выбирается одним из способов, изложенным в § 3, с учетом  $x^{k+1} \in Q$  называются *методами проекции градиента*.

Рассмотрим соотношения

$$Al = 0, l_j = 0, j \in J_0, J_0 = \{j: x_j^k = 0, j = \overline{1, n}\}.$$

Найдем  $l(J_B) = -A_B^{-1} l(J_H)$ ,  $A_B = A(I, J_B)$ ,  $J_B \subset J \setminus J_0$ ,  $J_B \cup J_H = J \setminus J_0$ ,  $\det A_B \neq 0$  и подставим вектор  $l(J_H)$  в функцию  $f_1(l; x^k)$ :  $\varphi_1(l(J_H)) = f_1(l(J_H); x^k)$  при условии  $l = \{l(J_0) = 0, l_B = -A_B^{-1} l(J_H), l(J_H)\}$ . Вектор  $-l^k(J_H)$ , где  $l^k(J_H)$  — решение задачи

$$\varphi_1(l(J_H)) \rightarrow \min, l'(J_H)l(J_H) \leq 1, \quad (7)$$

называется *приведенным градиентом функции  $f(x)$  в точке  $x^k$* .

Методы построения последовательных приближений (3) с использованием  $l^k(J_H)$  из (7) называются *методами приведенных градиентов*. Способы выбора шага  $\Theta_k$  по целевой функции для них указаны в § 3. Дополнительное ограничение на шаг  $\Theta_k$  получается, как обычно, из условия  $x^{k+1} \in Q$ .

Таким образом, как и в § 3, конкретная реализация метода (3), (4) зависит от выбора нормировочной функции  $S_k(l; x^k)$ .

В приведенных методах при формировании окрестности  $\{l: S_k(l; x^k) \leq 1\}$  использовались по аналогии с § 3 простые дополнительные функции, не связанные, вообще говоря, с задачей (1). В задачах условной минимизации имеется возможность формировать  $S_k(l; x^k)$  с помощью дополнительного учета основных ограничений. Однако это заметно усложняет прямые методы решения задачи (1). Поэтому такая идея более естественна и реализуется в приближенных методах (см. п. 2), в которых дополнительные ограничения учесть значительно проще.

Недостатком нормировочного условия (5) является то, что вектор  $l^k$  условного антиградиента существенно зависит от структуры множества  $X$  в точках, которые значительно удалены от  $x^k$  и в которых, следовательно, линейная аппроксимация  $f_1(x; x^k)$  уже слабо связана с целевой функцией  $f(x)$ . Это сказывается на скорости сходимости метода условного градиента, в силу чего часто рекомендуются другие методы, хотя в них вычисление направлений  $l^k$  сопряжено с большими трудностями. Все методы построения последовательных приближений (3)  $x^k \in X$  с помощью решения задачи (4) называются *методами допустимых (возможных) направлений*, ибо решение  $l^k$  задачи (4) при  $x^k \neq x^0$  доставляет допустимое (даже подходящее) направление в точке  $x^k$ . Если  $x^1$  — план задачи (1) и на итерациях шаг  $\Theta_k$  выбирать так, чтобы не нарушались ограничения задачи (1), то  $x^k \in X$ ,  $k \geq 1$ . Это важное свойство точных методов позволяет при остановке процесса решения на любой итерации иметь план задачи (1).

Если в задаче (4), (5) вместо линейной аппроксимации  $f_1(l; x^k)$  использовать квадратичную аппроксимацию  $f_2(l; x^k)$  целевой функции, то метод (3), (4) с шагом  $\Theta_k$ , найденным с учетом § 3 и ограничения  $x^{k+1} \in Q$ , называется *методом ньютоновского типа*.

Если вместо задачи (1) рассмотреть двойственную к ней задачу (при условии, конечно, что теория и необходимые соотношения двойственности существуют), то все последующие действия приведут к *точным двойственным методам* решения задачи (1). Этот путь используется в линейном программировании (гл. I), выпуклом и геометрическом программировании (гл. II).

*Комбинированные точные методы* решения задачи (1) получаются, если описанные выше операции реализовать для пары из прямой и двойственной задач. Такие методы в настоящее время разработаны в линейном программировании.

**2. Задачи с линейными ограничениями. Приближенные методы.** Методы решения задачи (1), на итерациях которых не следят за тем, чтобы последовательные приближения были планами (прямыми или двойственными) задачи (1), называются *приближенными (итеративными)*. При этом приближения называют *оценками* прямых (или двойственных) планов.

Наиболее распространенные приближенные методы

основаны на использовании функций Лагранжа задач аппроксимации. Поскольку в итеративных методах отпадает необходимость слежения за выполнением на итерациях ограничений задачи, то представление (3) становится излишним и процедуру решения проще объяснить непосредственно на форме (2).

Пусть  $s_k(x^k; \varepsilon_k) = \{x: x \in Q\}$ ,  $Q$  — выпуклый компакт. Тогда задача (2) примет вид

$$f_1(x^{k+1}; x^k) = \min f_1(x; x^k), Ax = b, x \in Q. \quad (8)$$

Согласно теории двойственности (гл. II) найдется такой вектор Лагранжа  $\lambda^k$ , что

$$F_1(x^{k+1}; \lambda^k) = \min F_1(x, \lambda^k), x \in Q, \quad (9)$$

где  $F_1(x, \lambda) = f_1(x; x^k) + \lambda'(Ax - b)$  — функция Лагранжа задачи (8).

Если вектор  $\lambda^k$  известен, то задача поиска  $x^{k+1}$  из (9) значительно проще решения задачи (8). Построение вектора  $\lambda^k$  основано на следующих фактах: 1) если  $x(\lambda)$  — решение задачи  $F_1(x(\lambda), \lambda) = \min F_1(x, \lambda)$ ,  $x \in Q$ , то  $f_1(x(\lambda); x^k) = \min f_1(x; x^k)$ ,  $Ax - b = Ax(\lambda) - b$ ,  $x \in Q$ ; 2) если  $\lambda_i = \lambda_i^*$ ,  $i \neq j$ ;  $\lambda_j = \lambda_j^* + \Theta [Ax(\lambda) - b]_j$ ,  $\Theta > 0$ , то  $|[Ax(\lambda^*) - b]_j| < |[Ax(\lambda) - b]_j|$ .

Отсюда получается метод решения задачи (1): выбирается начальное приближение  $\lambda^1$  и находится начальная оценка плана  $x^1$ :

$$F(x^1, \lambda^1) = \min F(x, \lambda^1), x \in Q,$$

где  $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'[Ax - b]$  — функция Лагранжа исходной задачи (1). Пусть приближения  $\lambda^k$ ,  $x^k$  построены. Полагаем  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Theta_k [Ax^k - b]$ ,  $\Theta_k > 0$ , и находим  $x^{k+1}$  из задачи

$$F(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = \min F(x, \lambda^{k+1}), x \in Q. \quad (10)$$

Построение  $x^{k+1}$  по формуле (9), а вслед за ней и по формуле (10) имеет существенный недостаток: в окрестности многообразия  $Ax - b = 0$  при малых  $\lambda^k$  неустойчив процесс вычисления  $x^{k+1}$  и для малых возмущений  $x^k$ ,  $\lambda^k$  получаются существенно различные  $x^{k+1}$ . Для регуляризации задач (9), (10) (см. п. 5) добавим в них дополнительное ограничение

$$(Ax - b)'S(Ax - b) \leq 1, S > 0, \quad (11)$$

которое не изменяет множества планов задач (9), (10).

Функция Лагранжа задачи (10) с учетом ограничения (11)

$$F_{\mu}(x, \lambda) = f(x) + \lambda'(Ax - b) + \mu(Ax - b)'S(Ax - b) \quad (12)$$

называется *модифицированной функцией Лагранжа* для исходной задачи (1).

Описанный выше метод (10) при замене функции  $F(x, \lambda)$  на функцию (12) с  $\mu = 1/2$  при  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + + S(Ax^k - b)$  показал себя хорошо на многих тестовых задачах. Оба метода относятся к классу *двойственных итеративных методов*, поскольку в них сначала строятся оценки  $\lambda^k$ , а по ним оценки  $x^k$ .

Пара  $\{x^{k+1}, \lambda^k\}$  в задаче (8) составляет седловую точку функции Лагранжа  $F_1(x, \lambda)$ . Следовательно, по правилам § 3 можно организовать спуск-подъем в эту седловую точку. Такие методы называются *комбинированными итеративными*.

В прямых итеративных методах сначала строятся оценки  $x^k$  прямых планов, а по ним оценки  $\lambda^k$  двойственных планов. Такие методы существуют, но здесь не рассматриваются.

**3. Случай нелинейных ограничений.** *Линейной аппроксимацией* в точке  $x = x^*$ ,  $-\alpha \leq g(x^*) \leq 0$ ,  $\alpha = \alpha(x^*) \geq 0$ , *неравенства*

$$g(x) \leq 0 \quad (13)$$

назовем неравенство  $g_1(x; x^*) \equiv g(x^*) + (x - x^*)' \partial g(x^*) / \partial x \leq \beta(x^*)$ ,  $\beta(x^*) \geq 0$ , и отсутствие ограничения на  $x$ , если  $g(x^*) < -\alpha(x^*)$ . Числа  $\alpha(x^*)$ ,  $\beta(x^*)$  — *параметры аппроксимации*.

Если функцию  $g_1(x; x^k)$  заменить на  $g_2(x; x^k)$ , то получим *квадратичную аппроксимацию неравенства*. Но такие аппроксимации в вычислительной практике встречаются редко.

*Линейной аппроксимацией* в точке  $x^*$ ,  $\|g(x^*)\| \leq \leq \alpha(x^*)$ , *равенства*

$$g(x) = 0$$

назовем два неравенства

$$\beta_*(x^*) \leq g(x^*) + (x - x^*)' \partial g(x^*) / \partial x \leq \beta^*(x^*),$$

где  $\alpha(x^*)$ ,  $\beta^*(x^*)$ ,  $-\beta_*(x^*) \geq 0$  — *параметры аппроксимации*.

$$f(x) \rightarrow \min, g(x) \leq 0, h(x) = 0, \quad (14)$$

с гладкими скалярной  $f(x)$ ,  $m$ -векторной  $g(x)$  и  $l$ -векторной  $h(x)$  функциями называется последовательность задач

$$\begin{aligned} f_1(x; x^k) \rightarrow \min, g_1(x; x^k) \leq \beta(x^k), \beta_*(x^k) \leq \\ \leq h_1(x; x^k) \leq \beta^*(x^k), x \in S_h(x^k; \varepsilon_k), \end{aligned} \quad (15)$$

полученных линейной аппроксимацией в точках  $x^k$  целевой функции и ограничений задачи (14).

При квадратичной аппроксимации задачи (14),  $f(x) \in C^{(2)}$ , в последовательности задач (15) заменяется только функция  $f_1(x; x^k)$  на функцию  $f_2(x; x^k)$ . Дальнейшие построения аналогичны конструкциям п. 2.

**З а м е ч а н и е.** В последние годы стала развиваться теория сплайнов — теория приближений с помощью кусочно-гладких, кусочно-квадратичных и т. д. функций.

Например, если выбрать достаточно плотное множество точек  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(p)} \in Q$ , то функция  $f_Q(x) = \max \{f_1(x; x_{(i)}), i = \overline{1, p}\}$  будет весьма хорошей кусочно-линейной аппроксимацией выпуклой функции  $f(x)$  на выпуклом множестве  $Q$ . Поскольку задача  $f_Q(x) \rightarrow \min$  и ограничение  $f_Q(x) \leq 0$  легко сводятся к линейным (гл. I), то описанную в пп. 1—4 теорию нетрудно перенести на новый тип аппроксимаций.

**4. Методы штрафных функций.** Пусть  $X \subset R_n$  — множество планов некоторой задачи нелинейного программирования. Функцию  $\Psi(x, r)$ ,  $x \in R_n, r \in R_1$ , называют *внешней штрафной функцией* множества  $X$ , если (рис. IV.28)

$$\Psi(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in X, \\ \rightarrow \infty & \text{при } x \notin X, r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Простейшими примерами являются следующие внешние штрафные функции:

$$\Psi(x, r) = r \sum_{i=1}^m g_i^2(x), \text{ если } X = \{x: g(x) = 0\},$$

$$\Psi(x, r) = r \sum_{i=1}^m \max \{g_i(x), 0\}, \text{ если } X = \{x: g(x) \leq 0\}.$$



Внутренней штрафной (барьерной) функцией множества  $X$  называется функция (рис. IV.29)

$$\Phi(x, r) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x \notin X, \\ \rightarrow 0, & \text{если } x \in X, x \rightarrow \partial X, r \rightarrow 0, \\ \rightarrow \infty, & \text{если } x \in X, x \rightarrow \partial X, \end{cases}$$

где  $\partial X$  — граница множества  $X$ .

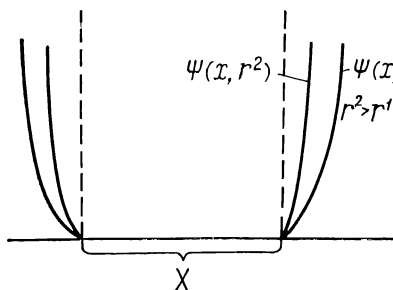


Рис. IV.28

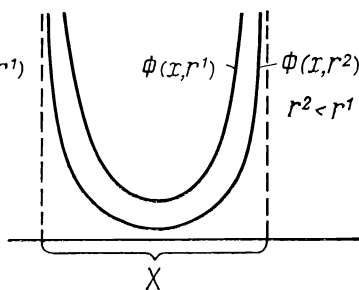


Рис. IV.29

Простейшая барьерная функция множества  $X = \{x: g(x) \leq 0\}$ :

$$\Phi(x, r) = \begin{cases} r \sum_{i=1}^m 1/g_i(x), & \text{если } g(x) \leq 0, \\ \infty, & \text{если } g(x) > 0. \end{cases}$$

Физическая интерпретация штрафных функций:  $\Psi(x, r)$  — величина штрафа за удаление от множества  $X$ ,  $\Phi(x, r)$  — величина штрафа за приближение к границе множества  $X$ ,  $r$  — параметр, характеризующий относительную величину штрафа.

Метод (внешних) штрафных функций решения задачи на условный минимум

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X, \quad (16)$$

состоит в переходе от задачи (16) к последовательности задач безусловной минимизации

$$f(x_\Psi(r)) + \Psi(x_\Psi(r), r) = \min \{f(x) + \Psi(x, r)\}, x \in R_n, r \rightarrow \infty.$$

Аналогично в методе барьерных (внутренних штраф-

ных) функций задача на условный минимум (16) заменяется на последовательность задач безусловной минимизации

$$f(x_\Phi(r)) + \Phi(x_\Phi(r), r) = \min \{f(x) + \Phi(x, r)\}, x \in R_n, r \rightarrow 0.$$

При весьма слабых предположениях методы штрафных функций обладают следующими свойствами:

1)  $f(x_\Psi(r_2)) \leq f(x_\Psi(r_1))$ , если  $r_2 > r_1$ ;  $f(x_\Phi(r_2)) \leq f(x_\Phi(r_1))$ , если  $r_2 < r_1$ ;

2)  $f(x_\Psi(r)) \rightarrow f(x^0)$ , если  $r \rightarrow \infty$ ;  $f(x_\Phi(r)) \rightarrow f(x^0)$ , если  $r \rightarrow 0$ ;

3)  $\Psi(x_\Psi(r), r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ;  $\Phi(x_\Phi(r), r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

**З а м е ч а н и е.** С точки зрения этих свойств новую интерпретацию можно дать функции Лагранжа и теории Куна — Таккера (гл. II).

Основное достоинство методов штрафных функций состоит в том, что для решения задачи условной минимизации достаточно иметь методы безусловной минимизации. Недостатком этих методов является то, что при добавлении штрафных функций, как правило, ухудшается структура целевых функций, которая зачастую приобретает черты овражной структуры, что отрицательно сказывается на характеристиках методов безусловной минимизации.

В пп. 1—4 описаны идеи и принципиальные моменты основных методов, используемых при поиске точек минимума. Заметим, что сколько-нибудь детальная структура задач при этом не использовалась. Поэтому реальная эффективность методов при решении конкретных задач во многом зависит от опыта и искусства исследователя, занятого задачами. Как неоднократно отмечалось, учет специфики задач может существенно упростить методы и повысить их эффективность. Оценки скорости сходимости имеют асимптотический характер, относятся к широким классам функций, поэтому для конкретных функций, как и в § 1, сравнительная эффективность методов может отличаться от той, что приведена выше.

**5. Регуляризация некорректных задач минимизации.** При практической реализации вычислительных методов нелинейного программирования возникает много проблем, от решения которых зависит конечный успех дела. В данном пункте кратко исследуется важная с этой точки зрения проблема регуляризации.

Пусть  $f(x) \geq \beta$ ,  $x \in X \subset R_n$ ,  $\beta > -\infty$ , и ищется оптимальный план задачи

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (17)$$

с непустым множеством решений  $X^0$ .

Пусть последовательность  $x^k \in X$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — минимизирующая:  $f(x^k) \rightarrow \inf f(x) = f^0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

Говорят, что задача (17) корректна относительно  $X^0$ , если каждая минимизирующая последовательность  $x^k \in X$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходится к множеству  $X^0$ :

$$\rho(x^k, X^0) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где  $\rho(x^k, X) = \inf \|x^k - x\|$ ,  $x \in X$ , — расстояние от точки  $x^k$  до множества  $X$ .

Существуют задачи некорректные, минимизирующие последовательности которых не обладают свойством (18). Например, задача  $f(x) = x/(1+x^2) \rightarrow \min$ ,  $x \geq 0$ , некорректна, ибо имеет единственное решение  $x^0 = 0$ , но минимизирующая последовательность  $x^k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ( $f(x^k) = k/(1+k^2) \rightarrow 0 = f(x^0)$ ) не сходится к точке  $x^0$ .

Основное свойство корректных задач, важное с точки зрения проблемы минимизации, состоит в том, что для них элементы минимизирующей последовательности можно брать в качестве приближенных решений задачи (17).

Докажем одно достаточное условие корректности задачи (17).

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in C$ ,  $x \in X \subset R_n$ . Если при некотором  $c$ ,  $-\infty < c < \infty$ , множество  $X^c = \{x: f(x) \leq c\} \cap X$  компактно, то задача (17) корректна относительно  $X^0$ .

**Доказательство.** Пусть  $x^k \in X^c$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — минимизирующая последовательность. Обозначим через  $X^*$  множество предельных точек этой последовательности. Из компактности множества  $X^c$  следует, что  $X^*$  — непустое множество. Пусть  $x^* \in X^*$ . Так как функция  $f(x)$  непрерывна, то  $f^0 \leq f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f^0$ , т. е.  $x^* \in X^0$ .

Поэтому свойство (18) имеет место. Теорема доказана.

Наряду с задачей (17) рассмотрим последовательность *регуляризованных задач*

$$\begin{aligned} f(x, \alpha_k) &= f(x) + \alpha_k \Omega(x) \rightarrow \min, \\ x &\in X, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\alpha_k > 0$ ,  $\Omega(x) \geq 0$  — бесконечно большая непрерывная

функция. Обозначим через  $f^0(\alpha_k)$ ,  $x(\alpha_k, \varepsilon_k)$  минимальное значение целевой функции и  $\varepsilon_k$  — решение задачи (19), т. е.

$$f^0(\alpha_k) \leq f(x(\alpha_k, \varepsilon_k)) + \alpha_k \Omega(x(\alpha_k, \varepsilon_k)) \leq f^0(\alpha_k) + \varepsilon_k.$$

**Теорема 2.** Если  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_k/\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , то  $\rho(x(\alpha_k, \varepsilon_k), X^0) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $x^k = x(\alpha_k, \varepsilon_k)$ . Очевидны неравенства

$$\begin{aligned} f^0 &\leq f(x^0) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^k) \leq f^0(\alpha_k) + \varepsilon_k \leq \\ &\leq f(x^0) + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k \leq f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда  $\Omega(x^k) \leq \Omega(x^0) + \varepsilon_k/\alpha_k$ . По условию,  $\varepsilon_k/\alpha_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, все элементы последовательности  $x^k$ ,  $k \geq k^0$ ,  $k^0 < \infty$ , принадлежат некоторому множеству уровня функции  $\Omega(x)$ , которое по условию компактно. Из (20) имеем  $f^0 \leq f(x^k) + \alpha_k \Omega(x^k) \leq f^0 + \alpha_k \Omega(x^0) + \varepsilon_k$ , т. е. последовательность  $x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — минимизирующая.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Из ее утверждения следует теорема 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл Ф., Мюррей У. Численные методы условной оптимизации. — М.: Мир, 1977.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975.

## Глава V. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Динамическим программированием* называется вычислительный метод решения специальных задач нелинейного программирования (гл. I—IV) и оптимального управления (гл. VII), математические модели которых имеют характер многоэтапных и динамических процессов. Этот метод, основанный на последовательном анализе процессов \*), стал впервые систематически и широко

---

\*) Принципиальное отличие метода данной главы от методов предыдущей главы указано в замечании в конце § 1 гл. IV.

ко применяться для решения экстремальных задач американским ученым Р. Беллманом с начала 50-х гг. XX в. В данной главе основные приемы метода будут изложены для ряда специальных задач нелинейного программирования. Некоторые приложения динамического программирования к задачам оптимального управления будут даны в гл. VII.

## § 1. Задача распределения ресурсов

Имеется сырье в объеме  $c$  и  $n$  технологических процессов. Если количество  $x$  сырья использовать в  $i$ -м технологическом процессе, то получим прибыль  $f_i(x)$ . Как распределить сырье между процессами, чтобы получить максимальную прибыль?

Пусть  $x_i$  — количество сырья, выделяемого на  $i$ -й процесс. Тогда математическая модель сформулированной задачи распределения ресурсов примет вид

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Специфика задачи нелинейного программирования (1) состоит в том, что ее целевая функция  $f(x)$  и функция  $g(x)$  основного ограничения *сепарабельны*, т. е. представлены в виде суммы функций одной переменной.

Первый этап решения экстремальной задачи методом динамического программирования — *инвариантное погружение* исходной задачи в семейство аналогичных задач. Этот этап представляет в некотором смысле искусство и в каждом конкретном случае зависит от опыта, изобретательности и интуиции исследователя. Для задачи (1) он состоит в рассмотрении совокупности задач распределения ресурсов, состоящей из задач с произвольным числом  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , технологических процессов и произвольным запасом  $y$ ,  $0 \leq y \leq c$ , сырья:

$$\sum_{i=1}^k f_i(x_i) \rightarrow \max, \sum_{i=1}^k x_i = y, x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

При  $k=n$ ,  $y=c$  из семейства задач (2) получается исходная задача (1).

Оптимальное значение  $B_k(y)$  целевой функции про-

извольной задачи семейства (2) называется *функцией Беллмана*:

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^k f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^k x_i = y, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (3)$$

Второй этап решения задачи методом динамического программирования состоит в получении уравнения для функции Беллмана. На этом этапе в общем случае используется *принцип оптимальности Беллмана*, сущность которого для задачи (1) выражают приводимые далее рассуждения. Эти рассуждения основаны на простых математических фактах и достаточно универсальны (см. материалы последующих параграфов и § 2, 6 гл. VII). При составлении искомого уравнения выявляется правильность инвариантного погружения. С другой стороны, способ погружения сказывается на виде уравнения. В задаче (2) с  $k$  процессами и запасом сырья  $y$  выделим  $k$ -му процессу сырье в количестве  $z$ ,  $0 \leq z \leq y$ . При этом размер прибыли от  $k$ -го процесса будет равен  $f_k(z)$ . На процессы с номерами  $1, 2, \dots, k-1$  останется сырья в количестве  $y-z$ . Пусть это сырье между оставшимися процессами распределено оптимально. Согласно определению (3) размер максимальной прибыли от  $k-1$  процесса будет равен  $B_{k-1}(y-z)$ . Таким образом, при выделении  $k$ -му процессу количества сырья  $z$  от всех  $k$  процессов и запаса сырья  $y$  получим прибыль

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z). \quad (4)$$

Изменяя количество  $z$  в пределах  $0 \leq z \leq y$ , находим значение  $x_k^0(y)$  (оптимальное количество сырья на  $k$ -й процесс), при котором общая прибыль (4) максимальна:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)]. \quad (5)$$

С другой стороны, согласно (3) максимальная прибыль от  $k$  процессов при количестве сырья  $y$  равна  $B_k(y)$ . Приравняв это значение правой части выражения (5), получим уравнение для функции  $B_k(y)$ :

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], \quad k = \overline{1, n}; \quad 0 \leq y \leq c. \quad (6)$$

Оно называется *уравнением Беллмана*. Поскольку урав-

нение (6) относительно аргумента  $k$  функции  $B_k(y)$  рекуррентное, для его решения нужно задать начальное условие. Последнее можно найти из определения (3), если положить  $k=1$ :

$$B_1(y) = \max f_1(x_1), \quad x_1 = y, \quad x_1 \geq 0.$$

Таким образом, начальное условие для уравнения Беллмана (6) имеет вид

$$B_1(y) = f_1(y). \quad (7)$$

Третий (и последний) этап решения задачи методом динамического программирования состоит в поиске решения уравнения Беллмана и в построении по нему решения исходной задачи (1). В уравнении (6) положим  $k=2$ :

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y-z)]. \quad (8)$$

В этом выражении справа стоят заданная функция  $f_2(z)$  и функция  $B_1(y)$ , найденная из (7). Поэтому формула (8) позволяет вычислить  $B_2(y)$  максимизацией известной функции одной переменной. Полагая в (6) далее  $k=3, 4, \dots, n$ , получаем последовательно функции  $B_3(y), B_4(y), \dots, B_n(y)$ , производя каждый раз операции максимизации функций одной переменной.

Согласно (3) число  $B_n(c)$  — максимальная прибыль для исходной задачи (1). Чтобы найти оптимальное распределение сырья по технологическим процессам, обратимся к выражению (5). Положив в нем  $k=n, y=c$ , получим число  $x_n^0(c)$ , которое, по определению (5), равно оптимальному количеству сырья, выделенному на последний (в данном случае  $n$ -й) процесс, если объем сырья на все  $n$  процессов равен  $c$ . Таким образом, компонента  $x_n^0$  оптимального плана  $x^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$  исходной задачи (1) найдена:  $x_n^0 = x_n^0(c)$ .

Если  $n$ -му процессу выделить количество  $x_n^0$ , то на остальные  $n-1$  процесс останется сырье в количестве  $c - x_n^0$ . Положим в (5)  $k=n-1, y=c-x_n^0$  и найдем  $x_{n-1}^0(c-x_n^0)$ . Ясно, что предпоследняя компонента оптимального плана  $x^0$  задачи (1) равна  $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(c-x_n^0)$ . Продолжив процесс решения, найдем компоненты  $x_{n-2}^0, \dots, x_1^0$  решения исходной задачи (1).

Проанализируем результат. Достоинства метода: 1) исходная задача (1) максимизации по  $n$  переменным свелась к  $n-1$  задаче (6) максимизации по одной переменной, причем результат — глобально оптимальный план; 2) в процессе решения не использовались аналитические свойства элементов задачи; исходные функции могли быть заданы таблично, графически, алгоритмически и т. п.; 3) по результатам вычислений  $B_k(y)$  легко построить решение задачи (1) при варьированных значениях  $c$  и  $n$ ; это позволяет провести анализ чувствительности решения задачи (1) к изменениям указанных параметров.

Основной недостаток метода, названный Беллманом «проклятием размерности», состоит в том, что при решении уравнения Беллмана (6) приходится запоминать функции. В данной задаче с распределением сырья одного вида ими оказались функции одного аргумента. В общем случае количество аргументов будет равно количеству видов сырья. Поскольку табулирование на ЭВМ функций многих ( $n > 2$ ) переменных из-за ограниченности оперативной памяти встречает принципиальные трудности, то обсуждаемый недостаток метода не позволяет реализовать описанную классическую схему динамического программирования при решении многомерных ( $c$ -вектор) задач. Предложены различные приемы борьбы с «проклятием размерности».

Пример. Рассмотрим числовой пример задачи (1) с данными из табл. V.1,  $c=5$ . Вычисление функций Беллмана проведем на табл. V.2. В каждой клетке наряду со значением функции Беллмана

Табл. V.1

$x$	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	0	1	2	4	7
$f_3(x)$	0	2	2	3	3	3

Табл. V.2

$y$	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	1(0)	2(0)	3(0)	4(0,4)	7(5)
$B_3(y)$	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	7(0)

$B_k(y)$  в скобках указано значение  $x_k^0(y)$ , на котором достигает максимума правая часть уравнения (6). Из табл. V.2 видно, что максимальная прибыль в рассматриваемой задаче равна  $B_3(5) = 7$ . Найдем оптимальное распределение ресурсов. Поскольку  $x_3^0(5) = 0$ , то третьему технологическому процессу ресурс не выделяется:  $x_3^0 = 0$ . Таким образом, на процессы 1, 2 остается ресурс в полном объеме 5.



Из табл. V.2 находим, что  $x_2^0(5) = 5$ . Следовательно, для получения максимальной прибыли весь ресурс надо выделить на второй технологический процесс ( $x_2^0 = 5$ ). Поэтому  $x_1^0 = 0$ .

В задаче изменим одно условие. Положим  $c = 4$ . Согласно табл. V.2 максимальная прибыль при этом будет равна  $B_3(4) = 5$ , причем  $x_3^0 = 1$ . Далее, по  $B_2(3)$  из табл. V.2 находим  $x_2^0 = 0$ . Следовательно,  $x_1^0 = 3$ .

## § 2. Оптимальная по времени обработка деталей на двух станках

Имеется  $n$  деталей с номерами  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  и два станка. Каждую деталь нужно обработать сначала на первом станке, затем на втором. Время обработки детали  $i$  на первом станке равно  $a_i$ , на втором  $b_i$ . Станки включаются одновременно в момент  $t=0$ . В какой последовательности нужно запустить детали в обработку, чтобы общее время обработки всех деталей было минимальным?

Погрузим эту задачу в семейство аналогичных задач. Общий элемент семейства построим следующим образом. Из исходной партии  $I$  удалим  $k$  деталей с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Каждая из оставшихся  $n-k$  деталей сначала обрабатывается на первом станке, затем на втором, но теперь первый станок включается в момент  $t=0$ , второй — через  $y$  единиц времени после включения первого станка. Обозначим через

$$B_{n-k}(i_1, \dots, i_k | y) \quad (1)$$

функцию Беллмана — минимальное время обработки оставшихся  $n-k$  деталей при указанных выше условиях.

Для составления уравнения Беллмана поступим следующим образом. Из оставшейся совокупности деталей с номерами  $I_k = I \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$  возьмем произвольную деталь  $i$  и первой запустим в обработку. Первый станок закончит обработку детали  $i$  в момент  $t = a_i$ . Второй станок освободится от детали  $i$  в момент

$$\begin{aligned} & a_i + b_i, \text{ если } y \leq a_i, \\ & y + b_i, \text{ если } y > a_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что оставшиеся детали с номерами  $I_k \setminus \{i\}$  запускаются в обработку в оптимальной последо-

вательности. Первый станок для них можно использовать с момента  $t = a_i$ . Второй станок согласно (2) подключается к обработке деталей из  $I_k \setminus \{i\}$  через

$$t_i = b_i + \max\{0, y - a_i\} \quad (3)$$

единиц времени после подключения к ним первого станка. По определению функции Беллмана, минимальное время обработки деталей из  $I_k \setminus \{i\}$  равно  $B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i | t_i)$ . Таким образом, время обработки  $n - k$  деталей из  $I_k$  при указанном способе равно

$$a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i | t_i). \quad (4)$$

Выбирая для первоочередной обработки каждую деталь из  $I_k$ , находим среди чисел (4) минимальное:

$$\min_{i \in I_k} \{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i | t_i)\}. \quad (5)$$

Ясно, что число (5) равно числу (1):

$$B_{n-k}(i_1, \dots, i_k | y) = \min_{i \in I_k} \{a_i + B_{n-k-1}(i_1, \dots, i_k, i | t_i)\}. \quad (6)$$

Уравнение Беллмана получено. Если положить  $k = n - 1$ , т. е. из  $I$  удалить все детали, кроме  $i$ -й, то найдем начальное условие для рекуррентного уравнения (6):

$$B_1(1, \dots, i-1, i+1, \dots, n | y) = \begin{cases} a_i + b_i, & \text{если } y \leq a_i, \\ y + b_i, & \text{если } y > a_i. \end{cases} \quad (7)$$

Оптимальную последовательность запуска деталей можно построить, решая уравнение (6) при начальном условии (7). Однако в данном случае решение задачи получим, анализируя уравнение (6).

Если через  $B_n(y)$  обозначить минимальное время обработки всех  $n$  деталей из  $I$  при включении второго станка через  $y$  единиц времени после начала обработки деталей первым станком, то из (6) при  $k = 0$ ,  $k = 1$  имеем

$$B_n(y) = \min_{i \in I} \{a_i + B_{n-1}(i | t_i)\}, \quad (8)$$

$$B_{n-1}(i | t_i) = \min_{j \in I \setminus \{i\}} \{a_j + B_{n-2}(i, j | t_{ij})\}, \quad (9)$$

где согласно (3)

$$t_{ij} = b_j + \max\{0, t_i - a_j\}. \quad (10)$$

Подставим (9) в (8):

$$B_n(y) = \min_{i \in I} \min_{j \in I \setminus \{i\}} \{a_i + a_j + B_{n-2}(i, j | t_{ij})\}. \quad (11)$$

Число  $a_i + a_j + B_{n-2}(i, j | t_{ij})$  равно времени обработки деталей из  $I$ , когда первой обрабатывается деталь  $i$ , затем деталь  $j$ , а оставшиеся детали — в оптимальной последовательности. Если переставить порядок обработки только деталей  $i$  и  $j$ , то время обработки всех деталей из  $I$  станет равным  $a_i + a_j + B_{n-2}(i, j | t_{ji})$ , где

$$t_{ji} = b_j + \max\{0, t_j - a_i\}. \quad (12)$$

Из физического смысла функции Беллмана следует, что  $B_{n-2}(i, j | y)$  — функция, не убывающая по  $y$  (задержка включения второго станка не может сократить минимальное время обработки деталей). Поэтому выполняются неравенства

$$B_{n-2}(i, j | t_{ij}) \leq B_{n-2}(i, j | t_{ji}), \text{ если } t_{ij} \leq t_{ji},$$

$$B_{n-2}(i, j | t_{ji}) \leq B_{n-2}(i, j | t_{ij}), \text{ если } t_{ji} \leq t_{ij}.$$

Если в (11) учесть эти неравенства, то придем к выводу, что в оптимальной последовательности запуска деталей деталь  $i$  обрабатывается раньше детали  $j$ , если  $t_{ij} \leq t_{ji}$ . При  $t_{ji} \leq t_{ij}$  сначала должна обрабатываться деталь  $j$ . Из (10) при  $y=0$  получаем

$$\begin{aligned} t_{ij} &= b_j + \max\{0, b_i + \max\{0, 0 - a_i\} - a_j\} = \\ &= b_j + \max\{0, b_i - a_j\} = \begin{cases} b_j, & \text{если } b_i \leq a_j, \\ b_j + b_i - a_j, & \text{если } b_i > a_j. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично:

$$t_{ji} = \begin{cases} b_i, & \text{если } b_j \leq a_i, \\ b_i + b_j - a_i, & \text{если } b_j > a_i. \end{cases} \quad (14)$$

Из (13), (14) следует простой алгоритм построения оптимальной последовательности запуска деталей в обработку. Исходные данные запишем в табл. V.3. Среди элементов  $a_i, b_i$  найдем наименьший. Пусть им оказался элемент  $a_{i_0}$ :

$$a_{i_0} = \min_{j=\overline{1, n}} a_j \leq \min_{j=\overline{1, n}} b_j. \quad (15)$$

Покажем, что в этом случае выполняются неравенства

$$t_{i_0 j} \leq t_{j i_0}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Действительно, из (14) получим, что  $t_{j i_0} = b_{i_0} + b_j - a_{i_0}$ . Тогда в силу (15) справедливы неравенства  $t_{j i_0} \geq b_j$ ,  $t_{j i_0} \geq b_{i_0} + b_j - a_j$ , из которых с учетом (13) следуют неравенства (16). Неравенства (16) означают, что деталь с номером  $i_0$  должна обрабатываться в первую очередь.

Т а б л. V.3

№ детали	1	2	...	$i$	...	$n$
Станок №1	$a_1$	$a_2$	...	$a_i$	...	$a$
Станок №2	$b_1$	$b_2$	...	$b_i$	...	$b_n$

Т а б л. V.4

№ детали	1	2	3	4	5	6
Станок №1	5	3	1	4	3	1
Станок №2	6	5	5	3	2	2

Пусть среди элементов  $a_i, b_i, i = \overline{1, n}$ , табл. V.3 минимальным оказался элемент  $b_{j_0}$ , т. е.

$$b_{j_0} = \min_{j=\overline{1, n}} b_j \leq \min_{j=\overline{1, n}} a_j. \quad (17)$$

В этом случае деталь с номером  $j_0$  должна обрабатываться последней. Действительно, при условиях (17) справедливы следующие соотношения:

$$t_{j_0 i} = b_i, \quad t_{j_0 i} \geq b_{j_0}, \quad t_{j_0 i} \geq b_{j_0} + b_i - a_{j_0}. \quad (18)$$

Из (18) с учетом (13) следуют неравенства

$$t_{i j_0} \leq t_{j_0 i}, \quad i = \overline{1, n},$$

которые доказывают справедливость утверждения.

Как только будет найдена деталь, которая обрабатывается в первую или в последнюю очередь, из таблицы вычеркивается соответствующий столбец и операция продолжается с меньшим числом деталей.

**З а м е ч а н и е.** Если  $a_{i_0} = b_{i_0}$ , то безразлично, первой или последней будет обрабатываться  $i_0$ -я деталь в группе деталей с невычеркнутыми номерами. Всегда можно считать, что она обрабатывается первой.

Для числового примера с данными из табл. V.4 оптимальная последовательность такова:  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ .

График обработки деталей изображен на рис. V.1, где по оси абсцисс отложено время, по оси ординат — номера деталей. Сплошные отрезки — интервалы работы первого станка, волнистые — интервалы работы второго станка.

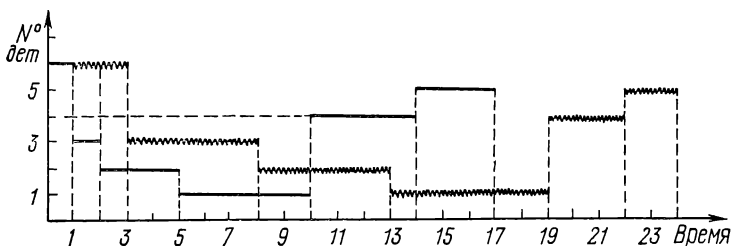


Рис. V.1

### § 3. Построение кратчайшего пути на сети

Имеется сеть  $S = \{I, U\}$ , на которой заданы только характеристики дуг  $(i, j) \in U: c_{ij} \geq 0$  — расстояние от узла  $i$  до узла  $j$ . Требуется для двух фиксированных узлов  $s, t \in I$  найти путь из  $s$  в  $t$  минимальной длины (путем из  $s$  в  $t$  называется цепь из  $s$  в  $t$ , все дуги которой при движении из  $s$  в  $t$  прямые).

Вложим эту задачу в семейство аналогичных задач. Общая задача семейства состоит в построении кратчайшего пути из узла  $s$  в произвольный узел  $j \in I$ . Обозначим через  $B_j$  функцию Беллмана — длину кратчайшего пути из  $s$  в  $j$ .

Для составления уравнения, которому удовлетворяет функция  $B_j$ , для пути из  $s$  в  $j$  последнюю дугу выберем произвольной:  $(i, j) \in U$  и предположим, что найден кратчайший путь из  $s$  в узел  $i \in I_j^-$ , где  $I_j^-$  — множество узлов  $i \in I$ , соединенных с  $j$  дугами  $(i, j) \in U$ . Тогда длина пути из  $s$  в  $j$  будет равна

$$B_i + c_{ij}. \quad (1)$$

Перебирая узлы  $i \in I_j^-$ , находим среди чисел (1) минимальное:

$$\min_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \quad (2)$$

Ясно, что (2) — длина кратчайшего пути из  $s$  в  $j$ . Поскольку, по определению, функция Беллмана равна  $B_j$ , то для  $B_j$  получается следующее уравнение Беллмана:

$$B_j = \min_{i \in \bar{I}_j} (c_{ij} + B_i). \quad (3)$$

Краевое условие для уравнения (3) имеет вид

$$B_s = 0 \quad (4)$$

и выражает вполне очевидное свойство функции  $B_j$ .

В отличие от предыдущих параграфов уравнение Беллмана (3) не является рекуррентным. Обозначим через  $I^*$  множество узлов  $i \in I$ , для которых известно значение  $B_i$  функции Беллмана. Множество  $I^* \neq \emptyset$ , ибо согласно (4)  $s \in I^*$ . Если  $t \in I^*$ , то задача решена:  $B_t$  — длина кратчайшего пути из  $s$  в  $t$ .

Пусть  $t \in I^*$ . В сети  $S$  по множеству  $I^*$ ,  $s \in I^*$ ,  $t \in I^*$ , построим разрез  $U(I^*) = \{(i, j) \in U : i \in I^*, j \notin I^*\}$ . Предположим, что  $U(I^*) \neq \emptyset$ . Ясно, что каждый путь из узла  $s$  в узел  $k \in I^*$  содержит хотя бы одну дугу из  $U(I^*)$ . Следовательно, в силу того, что  $c_{ij} \geq 0$ ,  $(i, j) \in U$ , для каждого узла  $k \in I^*$  справедливо неравенство

$$B_k \geq \min_{(i, j) \in U(I^*)} (B_i + c_{ij}) = B_{i_*} + c_{i_* j_*}, \quad k \in I^*. \quad (5)$$

Поскольку  $(i_*, j_*)$  — дуга разреза, то  $i_* \in I^*$ ,  $j_* \notin I^*$ . В (5) положим  $k = j_*$ . Тогда согласно (3) получим

$$B_{j_*} = B_{i_*} + c_{i_* j_*}.$$

Узел  $j_*$  добавим к множеству  $I^*$  и продолжим решение. Через конечное число шагов либо найдем  $B_t$ , либо построим множество  $I^*$ , для которого  $U(I^*) = \emptyset$ . Второй случай означает, что в сети  $S$  нет путей из  $s$  в  $t$ .

Описанную выше схему решения уравнения Беллмана можно реализовать на сети  $S$  с помощью метода меток. Обозначим через  $I^*$  множество узлов, для которых известно значение функции Беллмана, и через  $\omega(I^*) = \{j \in I : (i, j) \in U(I^*)\}$  — множество узлов, соседних с множеством  $I^*$ . Если  $\omega(I^*) = \emptyset$ , то в сети  $S$  нет путей из  $s$  в  $t$ . Пусть  $\omega(I^*) \neq \emptyset$ . Подсчитаем числа  $B'_j$  (временные метки узлов  $j$ , соседних с  $I^*$ ):

$$B'_j = \min_{i \in I^* \cap I^-(j)} (B_i + c_{ij}), \quad j \in \omega(I^*), \quad (6)$$

и найдем минимальное среди них:

$$B_{j_*}' = \min B_j', j \in \omega(I^*).$$

Для узла  $j_* \in I^*$  значение  $B_{j_*}$  функции Беллмана равно  $B_{j_*}'$ .

Узел  $j_*$  добавляем к множеству  $I^*$  и повторяем операции. Числа  $B_j, j \in I^*$ , называются *постоянными метками узлов*. На каждой итерации множество постоянных

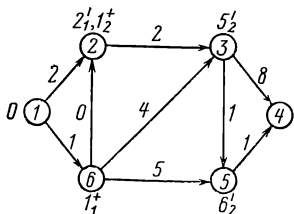


Рис. V.2

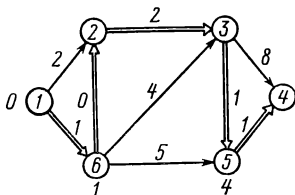


Рис. V.3

меток увеличивается. Через конечное число итераций узел  $t$  или получит постоянную метку  $B_t$ , или не получит ее и  $\omega(I^*) = \emptyset$ . Второй случай означает, что нет пути из  $s$  в  $t$ . В первом случае  $B_t$  — длина кратчайшего пути из  $s$  в  $t$ . Кратчайший путь согласно (3) можно построить по постоянным меткам. По метке  $B_t$  находим метку  $B_{i_1}$  так, чтобы  $B_t = c_{i_1 t} + B_{i_1}$ . Аналогично поступаем с  $B_{i_1}$ :  $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$  и т. д.

Для иллюстрации метода пометок найдем кратчайший путь из узла 1 в узел 4 сети, изображенной на рис. V.2. Над дугами сети проставлены их длины  $c_{ij}$ . На первой итерации постоянную метку 0 имеет только один узел 1. Соседними с узлом 1 являются узлы 2, 6. Подсчитаем для них временные метки по формуле (6) и запишем результаты около узлов, снабдив штрихами и нижним индексом «1», указывающим номер итерации. Минимальная временная метка принадлежит узлу 6. Метку узла делаем постоянной, т. е. зачеркиваем штрих. Для узлов  $\{2, 3, 5\}$ , соседних с  $I^* = \{1, 6\}$ , по формуле (6) подсчитаем временные метки (на рис. V.2 временные метки имеют нижний индекс «2»). Среди всех узлов с временными метками найдем узел 2 с минимальной меткой 1. Эту метку делаем постоянной. На рис. V.3 проставлены постоянные метки узлов и изображен кратчайший путь из узла 1 в узел 4.

## § 4. Задача о максимальном потоке

Решим задачу о максимальном потоке (см. § 3 гл. II)

$$v^0 = \max_{x, v} v, \quad \sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ij} = \begin{cases} v, & \text{если } i = s, \\ -v, & \text{если } i = t, 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \\ 0, & \text{если } i \in I^0, (i, j) \in U, \end{cases}$$

на сети  $S = \{I, U\}$ ,  $I = I^0 \cup s \cup t$  с источником  $s$  и стоком  $t$ .

Пусть  $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$  — некоторый поток на сети  $S$ . Цепь из  $s$  в  $t$  назовем *путем, увеличивающим поток  $x$* , если при движении вдоль цепи от  $s$  к  $t$   $x_{ij} < d_{ij}$  на прямой дуге  $(i, j)$ ;  $x_{ij} > 0$  на обратной дуге  $(i, j)$ .

Очевидно утверждение: поток  $x^0$  максимален тогда и только тогда, когда на сети  $S$  не существует путей, увеличивающих поток  $x^0$ .

Таким образом, построение максимального потока можно свести к ряду задач построения путей, увеличивающих поток.

Заменим сеть  $S$  на новую сеть  $S(x) = \{I, U(x)\}$  следующим образом. Дугу  $(i, j) \in U$  заменим на две дуги \*):  $(i, j) \in U(x)$ ,  $(j, i) \in U(x)$ , если  $0 < x_{ij} < d_{ij}$ ; на дугу  $(j, i) \in U(x)$ , если  $x_{ij} = d_{ij}$ , и оставим ее без изменения, если  $x_{ij} = 0$ . Ясно, что на сети  $S$  с потоком  $x$  существует путь, увеличивающий этот поток, в том и только том случае, когда на сети  $S(x)$  существует путь из  $s$  в  $t$ . Каждой дуге  $(i, j) \in U(x)$  припишем длину  $c_{ij} = 1$  и среди путей из  $s$  в  $t$  будем искать кратчайший. Метод решения такой задачи изложен в § 3. Понятно, что кратчайший путь на  $S(x)$  будет состоять из минимального числа дуг. Ему на сети  $S$  соответствует путь, увеличивающий поток  $x$ . Вдоль этого пути будем увеличивать поток до тех пор, пока или какая-нибудь прямая дуга не станет *насыщенной* ( $x_{ij} = d_{ij}$ ), или какая-нибудь обратная дуга не станет *свободной* ( $x_{ij} = 0$ ). Для нового потока построим сеть  $S(\bar{x})$  и повторим операции.

Если  $x_{ij}, d_{ij}, (i, j) \in U$ , — целые числа, то за итерацию величина потока возрастет на целое число и поэтому через конечное число итераций из начального нулевого потока  $x = 0$  будет построен максимальный поток через сеть  $S$ .

\*) Пара этих дуг образует неориентированную дугу  $[i, j]$ .



З а м е ч а н и я. 1. Поскольку на сети  $S(x)$  все дуги  $(i, j) \in U(x)$  имеют одинаковую длину, то алгоритм построения кратчайших путей из  $s$  в  $t$ , описанный в § 3, упрощается: временные метки всех узлов  $j \in \omega(I^*)$  можно сразу считать постоянными.

2. В качестве упражнения предлагается приведенный алгоритм реализовать полностью на сети  $S$  без перехода к сети  $S(x)$ .

Для иллюстрации метода построим максимальный поток из узла 1 в узел 4 сети, изображенной на рис. V.4. Над каждой дугой записана ее пропускная способность.

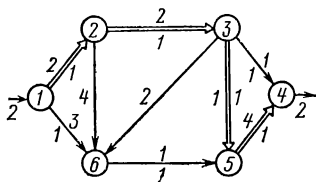


Рис. V.4

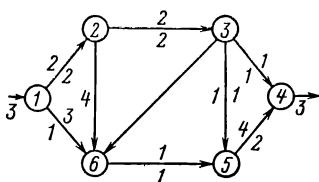


Рис. V.5

Методом пометок найдем кратчайший путь из узла 1 в узел 4. Для сети  $S(0)$ , изображенной на рис. V.4, можно построить два кратчайших пути:  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 6, 5, 4\}$ . Поскольку минимальная пропускная способность дуг вдоль первого пути равна  $d_{34}=1$  и вдоль второго пути  $d_{65}=1$ , то начальный нулевой поток можно увеличить на величину 2. На рис. V.4 двойными линиями отмечен кратчайший путь на исходной сети с потоком, полученным после первой итерации (дуговые потоки записаны под дугами). Вдоль нового пути пропускаем поток величины 1. После этого на сети (рис. V.5) уже невозможно построить путей, увеличивающих поток. Таким образом, поток на рис. V.5 — максимальный со значением 3.

## § 5. Одна задача сетевого планирования

В сетевом планировании исследуются проблемы реализации сложных проектов (комплексных работ), состоящих из большого количества отдельных работ, которые должны выполняться в определенной технологической последовательности. Одна из основных задач сетевого планирования — расчет времени выполнения проекта.

Составим сетевую модель задачи. Факт (явление) начала или окончания какого-нибудь множества работ из

заданной совокупности работ проекта назовем *событием* и отнесем ему узел  $i \in I$ . Работу, начинающуюся событием  $i \in I$  и заканчивающуюся событием  $j \in I$ , обозначим дугой  $(i, j) \in U$ . Ни одна работа  $(i, j) \in U$  не может начаться, если не завершены все работы  $(k, i) \in U$ ,  $k \in I$ . На сети  $S = \{I, U\}$  выделяются два узла:  $s$  — *начальное событие* (начало выполнения проекта) и  $t$  — *конечное событие* (завершение проекта),  $I_s^- = \emptyset$ ,  $I_t^+ = \emptyset$ . Каждой дуге  $(i, j) \in U$  приписывается одна характеристика  $c_{ij} > 0$  — *время выполнения работы*  $(i, j)$ . Обозначим через  $x_i$ ,  $i \in I$ , — момент наступления события  $i$ :  $x_s = 0$ . Из технологических требований, имеющих в проекте и отраженных на структуре сети  $S$ , следуют неравенства

$$x_i + c_{ij} \leq x_j, \quad i, j \in I, \quad (i, j) \in U, \quad (1)$$

которые означают, что событие  $j$  наступает не раньше чем будут завершены все работы  $(i, j) \in U$ , начавшиеся в момент  $x_i$ . Из неравенств (1) следует, что в сети  $S$  нет контуров. Действительно, предположив противное и просуммировав неравенства (1) по дугам контура  $U_*$ , получим неравенство

$$\sum_{(i, j) \in U_*} c_{ij} \leq 0,$$

которое противоречит неравенствам  $c_{ij} > 0$ ,  $(i, j) \in U$ .

В дальнейшем будем предполагать, что для узлов  $i \in I \setminus (s \cup t)$  выполняются условия  $I_i^+ \neq \emptyset$ ,  $I_i^- \neq \emptyset$ .

Минимальным временем выполнения проекта является наименьшее число  $x_t^0$ , которое в совокупности с числами  $x_i$ ,  $i \in I$ ,  $i \neq t$ ,  $x_s = 0$  удовлетворяет неравенствам (1).

Поскольку для окончания проекта необходимо, чтобы все работы были завершены, то длина каждого пути из  $s$  в  $t$ , равная сумме  $\sum c_{ij}$ , вычисленной вдоль пути, не меньше чем  $x_t^0$  (чтобы убедиться в этом, достаточно сложить (1) вдоль пути). С другой стороны, очевидно, что найдется такая последовательность работ, составляющая путь из  $s$  в  $t$ , общая продолжительность которых равна  $x_t^0$ . Таким образом, задача вычисления  $x_t^0$  сводится к поиску пути из  $s$  в  $t$  с максимальной длиной  $\sum c_{ij}$ . Такой путь принято называть *критическим*.

Для построения на сети  $S = \{I, U\}$  критического пути используем динамическое программирование. Согласно

общей схеме метода (§ 1) на первом этапе (инвариантное погружение) исходную задачу вложим в семейство аналогичных задач. Общая задача семейства состоит в построении критического пути из узла  $s$  в произвольный (а не фиксированный  $t$ ) узел  $j \in I$ . Длина  $B_j$  этого пути называется функцией Беллмана.

Для составления уравнения (Беллмана), которому удовлетворяет функция  $B_j$ , рассуждаем так же, как в § 3 при построении кратчайшего пути. Последнюю дугу пути из  $s$  в  $j$  выбираем сначала произвольной:  $(i, j) \in U$ . Остальные дуги пути из  $s$  в  $j$ , которые составляют путь из  $s$  в  $i$ , выбираем так, чтобы длина пути из  $s$  в  $i$  была максимальной, т. е. равна  $B_i$ . Тогда длина всего пути из  $s$  в  $j$  будет равна

$$c_{ij} + B_i. \quad (2)$$

Перебирая все узлы  $i$  сети, соединенные с  $j$  дугами из  $U$  (совокупность таких узлов обозначается через  $I_j^-$ ), находим максимальное среди чисел (2)

$$\max_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \quad (3)$$

Рассуждением от противного легко показать, что число (3) равно максимальной длине путей из  $s$  в  $j$ . Поскольку, с другой стороны, по определению функции Беллмана, максимальная длина пути из  $s$  в  $j$  равна  $B_j$ , то в рассматриваемой задаче получается следующее уравнение Беллмана:

$$B_j = \max_{i \in I_j^-} (c_{ij} + B_i). \quad (4)$$

Значение функции Беллмана для узла  $s$  известно:

$$B_s = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) представляет краевое условие для уравнения (4).

Для решения уравнения Беллмана разработаем метод пометок. Обозначим через  $I^*$  множество узлов  $i \in I$ , для которых известно значение  $B_i$  функции Беллмана. Множество  $I^*$  непусто, так как согласно (5)  $s \in I^*$ . Если  $t \in I^*$ , то задача решена,  $B_t$  — длина максимального пути из  $s$  в  $t$ .

Пусть  $t \notin I^*$ . В сети  $S$  построим множество узлов

$\omega(I^*) = \{j \in I : (i, j) \in U, j \notin I^*, i \in I^*\}$ , соседних с  $I^*$ . В силу того что в сети  $S$  нет контуров, среди узлов  $j \in \omega(I^*)$  обязательно найдется узел  $j_*$ , для которого  $I_{j_*}^- \subset I^*$ . Поскольку для узлов  $i \in I^*$  значения  $B_i$  функции Беллмана известны, то из уравнения (4) легко найти значение

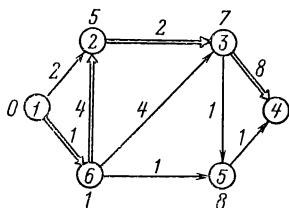


Рис. V.6

функции Беллмана для узлов  $i \in \tilde{I} = \{j \in \omega(I^*) : I_j^- \subset I^*\}$ .

Узлы  $j \in \tilde{I}$  добавляем к множеству  $I^*$  и переходим к следующей итерации. Через конечное число итераций будет найдено  $B_i$ . Иллюстрация метода на числовом примере приведена на рис. V.6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование.— М.: ИЛ, 1960.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1975.

## Глава VI. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Далеко не все встречающиеся в приложениях задачи на максимум и минимум можно записать в форме задач нелинейного программирования. Математические модели многих прикладных экстремальных задач сводятся к оптимизации функционалов на множествах функций. Первые задачи подобного типа в математике были поставлены и решены в XVII—XVIII вв. С тех пор раздел математики, в котором исследуются экстремальные задачи в бесконечномерных функциональных пространствах, стали называть *вариационным исчислением*. Название нового раздела произошло от его основного метода — исчисления (анализа) вариаций. Во второй половине XX в. в связи с задачами современной науки и техники возникла и стала интенсивно развиваться новая ветвь

вариационного исчисления — теория оптимального управления, которая будет изложена в гл. VII настоящего пособия. Однако основные методы и результаты классического вариационного исчисления, описанию которых посвящена данная глава, не потеряли своего значения и до настоящего времени.

## § 1. Основная задача вариационного исчисления

Основная задача вариационного исчисления возникла как непосредственное обобщение поставленной И. Бернулли в 1696 г. задачи о брахистохроне. Эта задача содержала типичные черты нового класса математических задач и на протяжении всей истории вариационного исчисления служила как объектом испытаний новых методов, так и основой для многих интересных и важных обобщений.

**1. Задача о брахистохроне.** В вертикальной плоскости заданы две точки  $A, B$ , расположенные на разных уровнях (рис. VI.1). Требуется соединить точки такой гладкой линией, спускаясь по которой с нулевой начальной скоростью тяжелый материальный шарик пройдет путь от  $A$  до  $B$  за минимальное время.

Эта задача получила название задачи о брахистохроне от греческих слов «брахистос» — кратчайший, «хронос» — время.

Для составления математической модели задачи обратимся к рис. VI.1. По закону сохранения энергии суммы потенциальной и кинетической энергий в точке  $A$  и любой точке  $\{x, y\}$  на кривой равны между собой:  $0 + 0 = -mgy + mv^2/2$ , поэтому

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (1)$$

Пусть  $y = y(x)$ ,  $x \in [0, a]$ , — гладкая линия, соединяющая точки  $A, B$ . Известно, что

$$v = ds/dt, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad dy = y_x(x) dx, \quad (y_x = dy/dx). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим  $dt = \sqrt{(1 + y_x^2)/2gy} dx$ , т. е. время движения точки из  $A$  в  $B$  по линии  $y(x)$  равно

$$T = \int_0^a \sqrt{(1 + y_x^2)/2gy} dx. \quad (3)$$

Задача о брахистохроне свелась к поиску такой гладкой линии  $y^0 = y^0(x)$ ,  $x \in [0, a]$ , которая принимает заданные значения на концах отрезка  $[0, a]$ :  $y^0(0) = 0$ ,  $y^0(a) = b$ , и доставляет минимум функционалу (3).

Сформулированная задача отличается от задач, исследованных в предыдущих главах, тем, что в ней нужно найти не конечномерный вектор, а функцию  $y^0(x)$ ,  $x \in [0, a]$ , — элемент бесконечномерного пространства.

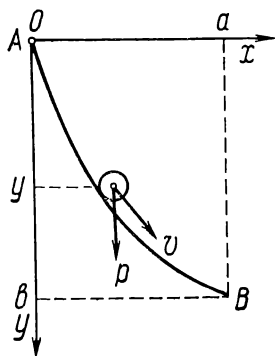


Рис. VI.1

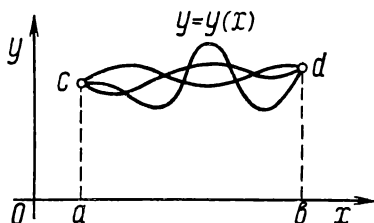


Рис. VI.2

**2. Основная задача.** Скалярные функции  $y = y(x)$ , определенные и непрерывные на отрезке  $[a, b]$  вместе с первыми производными  $y_x(x)$  и принимающие на концах отрезка заданные значения (рис. VI.2)

$$y(a) = c, \quad y(b) = d, \quad (4)$$

назовем *допустимыми кривыми*. Пусть  $F(x, y, z)$  — заданная скалярная функция скалярных аргументов  $x, y, z$  — по совокупности своих аргументов принадлежит классу  $C^{(2)}$ .

Задача минимизации функционала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \quad (5)$$

на множестве допустимых кривых  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , называется *основной задачей вариационного исчисления* \*).

\*). Нередко основная задача называется и *простейшей задачей вариационного исчисления*,

Допустимую кривую  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , называют *сильной минималью функционала* (5) (основной задачи), если при некотором  $\varepsilon > 0$  для всех допустимых кривых  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , таких, что

$$|y(x) - y^0(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a, b], \quad (6)$$

выполняется неравенство

$$I(y) \geq I(y^0). \quad (7)$$

Если неравенство (7) выполняется только для допустимых кривых  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , которые кроме (6) удо-

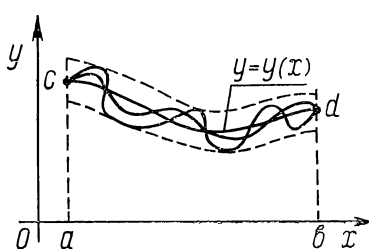


Рис. VI.3

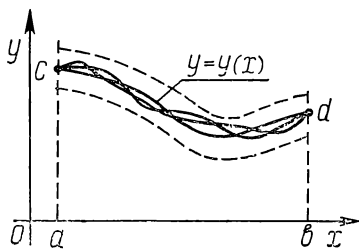


Рис. VI.4

влетворяют еще условию  $|y_x(x) - y_x^0(x)| \leq \varepsilon$ ,  $x \in [a, b]$ , то говорят, что  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — *слабая минималь функционала* (5).

Таким образом, сильная минималь лучше всех допустимых кривых, близких к ней по своим значениям (рис. VI.3), слабая минималь лучше только тех допустимых кривых, которые близки к ней как по своим значениям, так и по значениям своих производных (рис. VI.4). Ясно, что сильная минималь является и слабой, поэтому все необходимые условия слабого минимума будут и необходимыми условиями сильного минимума. В данной главе изучаются только слабые минимали. Сильные минимали будут исследованы в гл. VII.

**3. Существование решения.** Приведем без доказательства следующее утверждение. Пусть 1)  $F(x, y, z) \in C^{(1)}$ ; 2)  $F(x, y, z)$  выпукла по  $z$ ; 3)  $F(x, y, z) \geq \Phi(z)$ , где  $\Phi(z)/z \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Тогда существует абсолютно непрерывная функция  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , на которой выполняются равенства (4) и функционал (5) достигает сильного минимума.

Если в задаче (5) не выполнено условие выпуклости по  $z$  функции  $F(x, y, z)$ , то задача (5) может не иметь решения в принятом смысле. Тогда рассматривается *расширение основной задачи*, в котором вместо функции  $F(x, y, z)$  берется ее выпуклая по  $z$  оболочка. По решению расширенной задачи можно построить *минимизирующую последовательность* для исходной задачи (5), т. е. такую последовательность допустимых кривых  $y^k(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , что  $I(y^k) \rightarrow \inf I(y)$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Минимизирующую последовательность можно считать *обобщенным решением* задачи (5), построение которого достаточно для многих прикладных задач.

**4. Обсуждение.** Основная задача вариационного исчисления представляет собой частный случай *экстремальных задач в функциональных пространствах*:  $I(y) \rightarrow \min$ ,  $y \in Y$ , где  $Y$  — некоторое множество функций. Ее специфика состоит в выборе как множества  $Y$ , так и (это главное) конкретного вида функционала  $I$ . Значение основной задачи (или, другими словами, удачность ее постановки) определяется тем, что, с одной стороны, многие прикладные задачи имеют ее в качестве своей математической модели, а с другой, что она позволяет с помощью существующего математического аппарата получить результаты, интересные для приложений.

Основная задача является обобщением задач нелинейного программирования на пути перехода от конечномерных пространств к бесконечномерным. При этом планам задач нелинейного программирования соответствуют допустимые кривые задач вариационного исчисления. Принципиально новый элемент здесь — введение класса гладкости кривых, от которого зависит как смысл задачи, так и существование решения и методы исследования.

Известны три способа перехода от задач вариационного исчисления к задачам нелинейного программирования. Первый способ основан на дискретизации физического прототипа вариационной задачи. Например, вместо вариационной задачи о брахистохроне получится задача нелинейного программирования, если материальную точку заставить двигаться из  $A$  в  $B$  по цепи с конечным числом звеньев (рис. VI.5). Второй способ состоит в разностной аппроксимации математической модели вариационной задачи, при которой непрерывные функции заменяются на сеточные, производные — на разностные отно-



шения, интегралы — на интегральные суммы. К этому же типу можно отнести способы решения вариационных задач, в которых класс допустимых кривых ограничивается семейством функций, зависящих от конечного числа параметров, подлежащих оптимизации (метод Рунге, метод моментов, метод конечных элементов и др.). Третий способ перехода от вариационных задач к задачам нелинейного программирования связан с разностной ап-

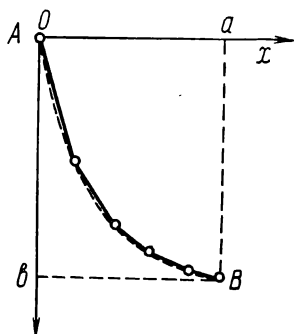


Рис. VI.5

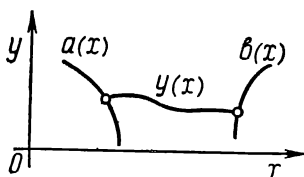


Рис. VI.5

проксимацией условий оптимальности, полученных для вариационных задач.

В качестве упражнения предлагается сформулировать (первым или вторым способом) конечномерный аналог задачи о брахистохроне и убедиться, что данная задача является весьма частным случаем задач нелинейного программирования. Полезным упражнением будет и доказательство последующих результатов вариационного исчисления с помощью предельного перехода от соответствующих результатов нелинейного программирования. Этот метод в вариационном исчислении впервые применил Л. Эйлер.

**5. Другие задачи вариационного исчисления.** Основная задача вариационного исчисления допускает разнообразные обобщения. Приведем краткое описание типичных из них.

*Задача с нефиксированным отрезком  $[a, b]$*  отличается от основной тем, что числа  $a, b$  (оба или одно) не задаются, а выбираются из условия минимума функционала (5).

*Задача с подвижными концами* отличается от основ-

ной задачи тем, что в ней вместо условия (4) требуется, чтобы левый конец кривой  $y(x)$  лежал на заданной линии  $a(x)$ , правый — на линии  $b(x)$  (рис. VI.6). Обширный класс *связанных задач вариационного исчисления* получается из основной задачи добавлением дополнительных ограничений (*связей*) на допустимую кривую. Если эти связи имеют вид

$$\int_a^b G_i(x, y, y_x) dx = c_i, \quad i = \overline{1, m},$$

то задача называется *изопериметрической*.

Часто связи задаются с помощью дифференциальных уравнений

$$\Phi_k(x, y, y_x) = 0, \quad k = \overline{1, l}, \quad (8)$$

и называются *дифференциальными (неголономными)* в отличие от *конечных (голономных)* связей, задаваемых конечными (не дифференциальными) выражениями вида  $\Phi_k(x, y) = 0, k = \overline{1, l}$ .

Задача минимизации функционала (5) при условиях (4), (8) называется *задачей Лагранжа*. Если вместо (4) рассмотреть подвижные концы, а функционал (5) заменить на следующий:

$$I(y) = \varphi(y(a), y(b)) \rightarrow \min, \quad (9)$$

то задача (8), (9) станет называться *задачей Майера*.

*Задача Больца* отличается от задачи Майера тем, что в ней вместо (9) рассматривается функционал

$$I(y) = \varphi(y(a), y(b)) + \int_a^b F(x, y, y_x) dx.$$

*Вариационные задачи с высшими производными* отличаются от основной задачи тем, что в них при соответствующих краевых условиях минимизируется функционал

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, dy/dx, \dots, d^s y/dx^s) dx,$$

заданный с помощью высших производных функции.

Многомерными называются такие вариационные задачи, в которых минимизация производится среди функций  $y(x_1, \dots, x_n)$  многих переменных.

В данной главе излагаются только методы решения основной задачи вариационного исчисления. Они допускают соответствующее обобщение на перечисленные задачи. Некоторые результаты для обобщенных задач вариационного исчисления получены в гл. VII.

## § 2. Метод вариаций

Метод вариаций, предложенный Ж. Л. Лагранжем в 1760 г., — основной метод теоретического исследования экстремальных задач в функциональных пространствах. Он представляет естественное обобщение метода исследования функций на максимум и минимум с помощью дифференциалов или допустимых направлений (см. § 1 гл. III). В этом методе решающую роль играет тип используемой вариации, от которой существенно зависит как простота, так и сила получаемого результата.

### 1. Вариация допустимой кривой. Пусть

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

— допустимая кривая основной задачи вариационного исчисления. Функцию  $\delta y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , называют (допустимой) вариацией кривой (1), если функция  $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$  вновь является допустимой кривой.

При исследовании слабых минималей удобно вариацию кривой (1) рассматривать в виде

$$\delta y(x) = \varepsilon h(x), \quad x \in [a, b], \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — вещественное число. В представлении (2) нетрудно заметить аналогию с представлением  $\Delta x = \theta l$ , принятым в нелинейном программировании, т. е. в (2) функция  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , играет роль направления движения в функциональном пространстве от кривой  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , а число  $\varepsilon$  — роль шага вдоль этого направления.

Функцию  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , впредь будем также именовать вариацией кривой (1), если она соответствует вариации  $\delta y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Из определения допустимой кривой следует, что

функция  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — вариация допустимой кривой в том и только том случае, если (рис. VI.7)

$$h(x) \in C^{(1)}, x \in [a, b], h(a) = h(b) = 0.$$

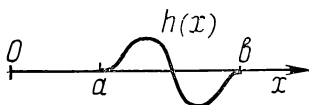


Рис. VI.7

**2. Вариации функционала.** Пусть  $I(y)$  — функционал, определенный на допустимых кривых. Если при фиксированных допустимой кривой  $y(x)$  и вариации  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , он допускает разложение

$$I(y + \varepsilon h) - I(y) = \varepsilon \delta I(y, h) + \varepsilon^2 \delta^2 I(y, h)/2 + o(\varepsilon^2), \quad (3)$$

то коэффициент  $\delta I(y, h)$  при первой степени параметра  $\varepsilon$  называется *первой вариацией функционала  $I$*  на кривой  $y(x)$  и вариации  $h(x)$ . Коэффициент  $\delta^2 I(y, h)$  при  $\varepsilon^2/2$  в разложении (3) называют *второй вариацией функционала  $I(y)$* . Из (3) следуют простые правила вычисления вариаций функционала:

$$\delta I(y, h) = \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \delta^2 I(y, h) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I(y + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Для функционала (5) § 1 основной задачи вариационного исчисления получаем

$$\begin{aligned} \delta I(y, h) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, y_x + \varepsilon h_x) dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} h_x(x) \right] dx, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 I(y, h) &= \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, y_x + \varepsilon h_x) dx \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y^2} h^2(x) + 2 \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2(x) \right] dx. \quad (5) \end{aligned}$$

**3. Необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций функционала.** Из определения слабой минимали следует, что допустимая кривая  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — слабая минималь тогда и только тогда, когда при некоторых  $M < \infty$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  для всех  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $|h(x)| \leq M$ ,  $|h_x(x)| \leq M$ ,  $x \in [a, b]$ , выполняется неравенство

$$I(y + \varepsilon h) \geq I(y). \quad (6)$$

Критерий (6) неудобен для практического использования из-за большого объема необходимых вычислений.

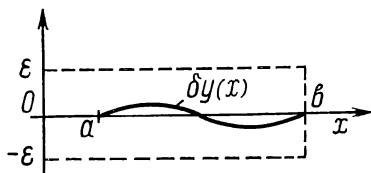


Рис. VI.8

Цель теоретических исследований — получение более удобных для проверки условий минимума.

Первый результат получается с помощью вариаций (2) с достаточно малыми  $\varepsilon$ , т. е. равномерно малых на отрезке  $[a, b]$  (рис. VI.8).

**Теорема 1.** На каждой слабой минимали  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и любой вариации  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ : 1) первая вариация функционала равна нулю (*условие стационарности*):

$$\delta I(y^0, h) = 0, \quad (7)$$

2) вторая вариация функционала неотрицательна:

$$\delta^2 I(y^0, h) \geq 0. \quad (8)$$

**Доказательство.** Если допустить, что  $\delta I(y^0, h_*) = \alpha \neq 0$ , то из (3), (6) при достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $-\text{sign } \varepsilon = \text{sign } \alpha$ , получим противоречие:  $0 \leq I(y^0 + \varepsilon h_*) - I(y^0) = -|\varepsilon| [|\alpha| + o(\varepsilon)/\varepsilon] < 0$ .

Аналогично при выполнении равенства (7) предположение  $\delta^2 I(y^0, h_*) = \alpha < 0$  ведет к противоречию:  $0 \leq I(y^0 + \varepsilon h_*) - I(y^0) = \varepsilon^2 [\alpha/2 + o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2] < 0$ , если  $\varepsilon$  — достаточно малое число. Теорема доказана.

Применяя условия (7), (8) к функционалу (5) § 1, с учетом (4), (5) получаем следующие результаты: если

$y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — слабая минималь основная задачи вариационного исчисления, то для всех вариаций  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , выполняются равенство

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} h_x(x) \right] dx = 0 \quad (9)$$

и неравенство

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y \partial y_x} h h_x + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x^2} h_x^2 \right] dx \geq 0. \quad (10)$$

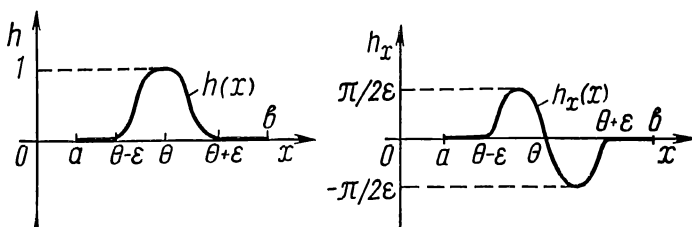


Рис. VI.9

**4. Уравнение Эйлера.** Необходимое условие слабого минимума (9) проще для проверки, чем критерий (6), поскольку оно выражено с помощью линейного относительно  $h$  функционала. Усиление этого результата достигается с помощью специальных вариаций  $h$ , изображенных на рис. VI.7, 9.

**Теорема 2.** Каждая слабая минималь  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , основной задачи вариационного исчисления является решением *уравнения Эйлера*:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_x} = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (11)$$

**Доказательство.** Интегрируя по частям второе слагаемое\*) в (9) и используя свойство  $h(a) = h(b) = 0$  вариации  $h$ , из (9) получаем

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y^0, y_x^0)}{\partial y_x} \right] h(x) dx = 0. \quad (12)$$

\*) Эта операция законна, например, при  $y^0(x) \in C^{(2)}$ . Без этого предположения теорема 2 доказывается в п. 5.

Далее воспользуемся следующим утверждением, имеющим самостоятельный интерес.

**Лемма (Лагранжа)** \*). Если равенство

$$\int_a^b a(x) h(x) dx = 0 \quad (13)$$

выполняется для непрерывной функции  $a(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и всех вариаций  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то  $a(x) \equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

**Доказательство.** Предположим, что при некотором  $\Theta \in ]a, b[$  вопреки утверждению имеем  $a(\Theta) = \alpha \neq 0$ . Пусть для определенности  $\alpha > 0$ . Тогда в силу непрерывности функция  $a(x)$  будет положительной в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\Theta$ :  $a(x) > 0$ ,  $x \in [\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon]$ . Учитывая это, подсчитаем левую часть выражения (13) на вариации  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , изображенной на рис. VI.9:

$$\int_a^b a(x) h(x) dx = \int_{\Theta - \varepsilon}^{\Theta + \varepsilon} a(x) h(x) dx > 0.$$

Полученное из (13) противоречие доказывает лемму.

Применение леммы к выражению (12) приводит к уравнению (11) и доказывает теорему 2.

Уравнение Эйлера (11) в подробной записи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y_x^2} y_{xx} + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial y \partial y_x} y_x + \frac{\partial^2 F(x, y, y_x)}{\partial x \partial y_x} - \\ - \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} = 0,$$

т. е. при  $y(x) \in C^{(2)}$  в неособом случае ( $\partial^2 F / \partial y_x^2 \neq 0$ ) — нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Общее решение  $y(x, c_1, c_2)$  таких уравнений зависит от двух произвольных постоянных  $c_1, c_2$ .

Таким образом, основная задача вариационного исчисления, имеющая решение, методом вариаций свелась (редуцировалась) к поиску двух постоянных  $c_1, c_2$ , удовлетворяющих равенствам

$$y(a, c_1, c_2) = c, \quad y(b, c_1, c_2) = d,$$

которые вытекают из определения допустимой кривой (1).

\*) Ее называют и *основной леммой* вариационного исчисления.

Допустимые кривые  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , основной задачи, являющиеся решениями уравнения Эйлера, принято называть экстремалами (Эйлера) задачи. В новых терминах утверждение теоремы гласит: каждая слабая минималь находится среди экстремалей задачи.

Для еще одной интерпретации теоремы 2 введем новое понятие. Сначала вспомним, что для функции  $f(x)$ ,  $x \in R_n$ , допускающей разложение

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a' \Delta x + o(\|\Delta x\|),$$

вектор  $a$  называется производной  $\partial f(x)/\partial x$  функции  $f(x)$ , или ее градиентом  $\text{grad } f(x)$ . По аналогии с этим для функционала  $I(y)$ , допускающего разложение

$$I(y + \delta y) - I(y) = \int_a^b a(x) \delta y(x) dx + o(\|\delta y\|),$$

функцию  $a(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , называют *вариационной производной*  $\delta I(y)/\delta y(x)$ , или *градиентом*  $\text{grad } I(y)$  функционала.

Согласно проведенным выше вычислениям левая часть выражения (11) с точностью до множителя  $\epsilon$  представляет линейную относительно  $\delta y$  часть разложения функционала основной задачи (5) § 1. Следовательно, вариационная производная функционала (5) § 1 имеет вид

$$\frac{\delta I(y)}{\delta y(x)} = \text{grad } I(y) = \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}$$

и в силу теоремы 2 на слабой минимали равна нулю. Таким образом, утверждение (11) теоремы 2 представляет полный аналог необходимого условия оптимальности  $(\partial f(x^0)/\partial x = \text{grad } f(x^0) = 0)$  в задачах на безусловный минимум.

**5. Интегральное уравнение Эйлера.** При исследовании вариационных задач важную роль играет пространство функций, над которым рассматривается функционал. В этом пункте исследуется основная задача вариационного исчисления в предположении, что функционал задачи определен в пространстве функций  $z(x) = y_x(x)$ ,  $x \in [a, b]$ :

$$I(z) = \int_a^b F(x, y(x), z(x)) dx \rightarrow \min \quad (14)$$



с условиями

$$\begin{aligned} z(x) \in C, y_x(x) = z(x), x \in [a, b]; \\ y(a) = c, y(b) = d. \end{aligned} \quad (15)$$

По аналогии с предыдущим функция  $\delta z(x) \in C$ ,  $x \in [a, b]$ , называется *вариацией функции*  $z(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , если функция  $\bar{z}(x) = z(x) + \delta z(x)$  и соответствующая ей в силу (15) функция  $\bar{y}(x)$  удовлетворяют условиям (4) § 1. Вариации вида

$$\delta z(x) = \varepsilon g(x)$$

порождаются такими и только такими функциями  $g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , которые обладают следующими свойствами (рис. VI.10):

$$g(x) \in C, \int_a^b g(x) dx = 0. \quad (16)$$

Повторив приведенные выше вычисления, получим

$$\begin{aligned} \delta I(z, g) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y + \varepsilon h, z + \varepsilon g) dx \Big|_{z=y_x, g=h_x, \varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{z=y_x} \int_a^x g(s) ds + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=y_x} g(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Если  $z^0 = z^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — решение основной задачи (14), (15), то  $\delta I(z^0, g) = 0$ , т. е. для всех вариаций  $g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , выполняется равенство

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{z=y_x} \cdot \int_a^x g(s) ds + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=y_x} \cdot g(x) \right] dx = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$\int_a^b \left[ - \int_a^x \frac{\partial F(s, y^0, z^0)}{\partial y} ds + \frac{\partial F(x, y^0, z^0)}{\partial z} \right]_{y_x^0 = z^0} g(x) dx = 0, \quad (17)$$

полученному из предыдущего после интегрирования по частям первого слагаемого. Подчеркнем, что последняя операция в данном случае законна, ибо функция  $\partial F / \partial y$  непрерывна вдоль допустимых кривых.

Для упрощения необходимого условия минимума (17)

воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого основано на новой вариации, изображенной на рис. VI.11, где заштрихованные части конгруэнтны.

**Лемма 2 (Дюбуа — Раймона).** Если равенство

$$\int_a^b b(x) g(x) dx = 0 \quad (18)$$

выполняется для непрерывной функции  $b(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и всех вариаций (16), то  $b(x) \equiv \text{const}$ ,  $x \in [a, b]$ .

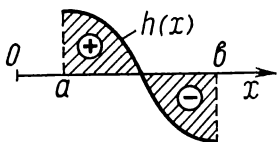


Рис. VI.10

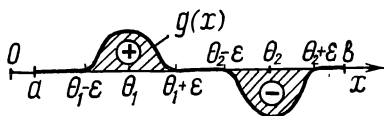


Рис. VI.11

**Доказательство.** Предположим, что вопреки утверждению найдутся такие точки  $\theta_1, \theta_2 \in ]a, b[$ , что  $b(\theta_1) \neq b(\theta_2)$ . Пусть для определенности  $b(\theta_1) > b(\theta_2)$ . Тогда в силу непрерывности функции  $b(x)$  при некотором  $\epsilon > 0$  будет выполняться неравенство

$$\min_{x \in [\theta_1 - \epsilon, \theta_1 + \epsilon]} b(x) > \max_{x \in [\theta_2 - \epsilon, \theta_2 + \epsilon]} b(x). \quad (19)$$

Функция  $g(x)$ , изображенная на рис. VI.11, удовлетворяет условиям (16) и является, следовательно, вариацией. На этой вариации левая часть в (18) с учетом (19) положительна:

$$\int_a^b b(x) g(x) dx = \int_{\theta_1 - \epsilon}^{\theta_1 + \epsilon} b(x) g(x) dx + \int_{\theta_2 - \epsilon}^{\theta_2 + \epsilon} b(x) g(x) dx > 0,$$

что противоречит (18). Лемма доказана.

Применив лемму 2 к равенству (17), приходим к выводу, что каждая слабая минималь  $y^0 = y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , основной задачи удовлетворяет интегральному уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} = \int_a^x \frac{\partial F(s, y, y_x)}{\partial y} ds + \text{const.} \quad (20)$$

В тождестве, которое получается из уравнения (20) после

подстановки в него функции  $y=y^0(x)$ ,  $x\in[a, b]$ , правая часть дифференцируема по  $x$ . Следовательно, и левая часть имеет непрерывную производную по  $x$ , т. е. вдоль  $y^0(x)$  существует и непрерывна производная

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}. \quad (21)$$

Заметим, что вдоль произвольной допустимой кривой  $y(x)$ ,  $x\in[a, b]$ , функция (21) может быть или не определена, или не принадлежать классу  $C$ .

Взяв производную по  $x$  от тождества (20) вдоль  $y^0(x)$ , получим *дифференциальное уравнение Эйлера* (11). Приведенное строгое доказательство теоремы 2 показывает, что форма (14), (15) более естественна для основной задачи вариационного исчисления, чем форма (5) § 1. Дополнительно об этом см. гл. VII.

**6. Теорема Гильберта.** При доказательстве теоремы 2 проведена операция интегрирования по частям в выражении (9), которая законна при условии, что  $\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))/\partial y_x \in C^{(1)}$ . Легко подсчитать, что производная по  $x$  от  $\partial F/\partial y_x$  содержит вторую производную  $y_{xx}$  функции  $y(x)$ . Между тем в исходной постановке основной задачи существование  $y_{xx}(x)$  не предполагалось. Отсюда следует, что в п. 4 теорема 2 доказана для слабых минималей класса  $C^{(2)}$ . Из доказательства теоремы 2, приведенного в п. 5, также не следует, что  $y(x) \in C^{(2)}$ , ибо непрерывность функции (21) не означает возможность ее вычисления по правилам дифференцирования сложных функций.

Найдем условие, при котором  $y^0(x) \in C^{(2)}$ . Предварительно введем понятие *неособой кривой*  $y=y(x)$ , вдоль которой, по определению,  $\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

**Теорема 3 (Гильберта).** Каждая неособая экстремаль принадлежит классу  $C^{(2)}$ .

**Доказательство.** По интегральному уравнению (20) и экстремали  $y(x)$ ,  $x\in[a, b]$ , построим уравнение

$$\Phi(x, z) = - \int_a^x \frac{\partial F(s, y(s), y_x(s))}{\partial y} ds + \frac{\partial F(x, y(x), z)}{\partial y_x} - \\ - \text{const} = 0, \quad (22)$$

которое имеет решение  $z(x) = y_x(x)$ . Из определения

неособой экстремали следует, что  $\partial \Phi(x, z)/\partial z|_{z=y_x(x)} = \partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 \neq 0$ . Поэтому по теореме о неявных функциях решение  $z=y_x(x)$  уравнения (22) допускает столько производных по  $x$ , сколько их по  $x, z$  имеет функция  $\Phi(x, z)$ . Поскольку  $F(x, y, z) \in C^{(2)}$ , то  $\Phi(x, z) \in C^{(4)}$ . Следовательно, и  $y_x(x) \in C^{(4)}$ , т. е.  $y(x) \in C^{(2)}$ . Теорема доказана.

**7. Канонические переменные и канонические уравнения Эйлера.** По задаче (14), (15) с помощью скалярной переменной  $p$  составим функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$H(x, y, p) = -F(x, y, z) + pz,$$

считая, что справа переменная  $z$  выражена через  $p$  из уравнения

$$p = \partial F(x, y, z)/\partial z. \quad (23)$$

**Теорема 4.** Уравнение Эйлера (11) эквивалентно канонической системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (24)$$

**Доказательство.** Пусть  $y=y(x)$  ( $y_x(x) = z(x)$ ) — решение уравнения (11). Покажем, что  $y=y(x)$ ,  $p(x) = \partial F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x$  — решение системы (24). Первое уравнение в (24) есть следствие определения функции  $z(x)$ . Для второго уравнения в (24) с учетом (11) имеем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Пусть, наоборот, известно решение  $y(x)$ ,  $p(x)$  системы (23). Покажем, что  $y(x)$  — решение уравнения (11).

Уравнения (24) с использованием обозначения (23) принимают вид  $y_x = z$ ,  $p_x = \partial F/\partial y$ . Из определения переменной  $p$  получаем  $p = d/dx \partial F/\partial z$ . Исключив из последних соотношений переменные  $p_x$ ,  $z$ , получим  $\partial F/\partial y = -d/dx \partial F/\partial y = 0$ . Теорема доказана.

*Переменные  $y, p$  канонической системы (24) называются каноническими.* В механике вспомогательную переменную  $p$  часто называют импульсом. Каноническая система (24) замечательна своей простотой и симметричностью. С помощью ее легко доказывается важное свойство гамильтониана вдоль экстремалей:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (25)$$

Действительно,  $dH/dx = \partial H/\partial x + y_x \partial H/\partial y + p_x \partial H/\partial p = \partial H/\partial x + \partial H/\partial p \cdot \partial H/\partial y - \partial H/\partial y \cdot \partial H/\partial p = \partial H/\partial x$ .

Из (25) следует, что вдоль каждой экстремали основной задачи, в которой функция  $F(x, y, z)$  не зависит от  $x$ , гамильтониан постоянен:

$$H(x, y(x), p(x)) \equiv \text{const}, x \in [a, b],$$

т. е.  $H(x, y, p)$  — первый интеграл канонической системы.

**8. Уравнение Гамильтона — Якоби.** Рассмотрим семейство задач

$$I_{x, v}(y) = \int_a^x F(t, y(t), y_x(t)) dt \rightarrow \min, y(t) \in C^{(1)}, \\ t \in [a, x], y(a) = c, y(x) = v, \quad (26)$$

зависящее от двух параметров  $x, v$ . Обозначим через  $y(t, x, v)$ ,  $t \in [a, x]$ ,  $S(x, v)$  минимальное значение функционала  $I_{x, v}(y)$  на ней для общей задачи семейства (26). Тогда

$$S(x, v) = \int_a^x F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v)) dt = \\ = \int_a^{x-\Delta x} F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v)) dt + \\ + \int_{x-\Delta x}^x F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v)) dt = S(x-\Delta x, \\ y(x-\Delta x, x, v)) - F(t, y(t, x, v), y_x(t, x, v))\Delta x + o(|\Delta x|). \quad (27)$$

Здесь использовано очевидное свойство минимали: отрезок  $y(t, x, v)$ ,  $t \in [a, x-\Delta x]$ , является минималью задачи (26) с параметрами  $x-\Delta x, y(x-\Delta x, x, v)$ .

Разделим обе части тождества (27) на  $\Delta x$  и положим  $\Delta x \rightarrow 0$ . В пределе получим

$$\frac{dS(x, y)}{dx} = F(x, y(x), y_x(x)). \quad (28)$$

Предположим, что функция  $S(x, v)$  дифференцируема по аргументам. Тогда с помощью равенства  $dS(x, v)/dx =$

$=\partial S(x, y)/\partial x + \partial S(x, y)/\partial y \cdot y_x$  уравнение (28) можно записать в виде

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} - F(x, y, y_x) + \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} y_x = 0. \quad (29)$$

Если от переменных  $y, z=y_x$  перейти к каноническим  $y, p$  и воспользоваться обозначением (23), то из (29) получим уравнение для функции  $S(x, y)$ :

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0, \quad (30)$$

которое называется *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Между уравнением Гамильтона — Якоби и каноническими уравнениями Эйлера существует тесная связь, которая позволяет строить экстремали основной задачи с помощью решений уравнения (30). Для многих *модельных задач* (идеальных форм физических задач) найти решение уравнения (30) зачастую проще, чем проинтегрировать каноническую систему (24). Это решение можно использовать для построения приближенного решения реальной задачи с помощью *методов теории возмущений*. С точки зрения теории уравнений первого порядка в частных производных канонические уравнения суть уравнения характеристик уравнения Гамильтона — Якоби.

**Теорема 5 (Якоби).** Пусть  $S=S(x, y, \alpha) \in C^{(2)}$  — полный интеграл уравнения (30) и  $\partial^2 S/\partial x \partial y \neq 0$ . Тогда функция  $y(x, \alpha, \beta) \in C^{(1)}$ ,  $x \in [a, b]$ , найденная из уравнения  $\partial S(x, y, \alpha)/\partial \alpha = \beta$ , в совокупности с функцией  $p(x, \alpha, \beta) = \partial S(x, y(x, \alpha, \beta))/\partial y$ ,  $x \in [a, b]$ , составляет общее решение канонической системы.

**Доказательство.** Сначала покажем, что  $\partial S/\partial \alpha = \beta$  — первый интеграл канонической системы, т. е.  $d(\partial S/\partial \alpha)/dx = 0$ . Имеем

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} \cdot y_x. \quad (31)$$

Уравнение (30) после подстановки в него функции  $S(x, y, \alpha)$  становится тождеством

$$\partial S(x, y, \alpha)/\partial x + H(x, y, \partial S(x, y, \alpha)/\partial y) \equiv 0, \quad (32)$$

дифференцирование которого по  $\alpha$  дает

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} = - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}. \quad (33)$$

Подставив это выражение в (31), получим с учетом (24) искомый результат  $\frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left(-\frac{\partial H}{\partial p} + y_x\right) \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha} = 0$ .

Проверим, что функции  $y(x, \alpha, \beta)$ ,  $p(x, \alpha, \beta)$  удовлетворяют канонической системе (24). Из определения  $y(x, \alpha, \beta)$  и равенства (33) имеем

$$y_x = -\frac{\partial^2 S / \partial x \partial \alpha}{\partial^2 S / \partial y \partial \alpha} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

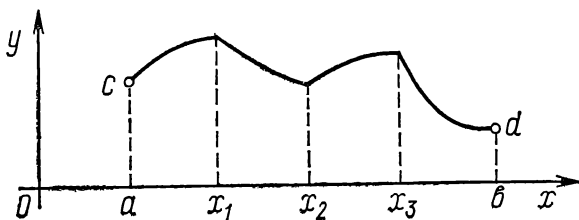


Рис. VI.12

Используя определение функции  $p(x, \alpha, \beta)$ , данное в теореме 5, получаем

$$p_x = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \cdot y_x \right] = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (34)$$

Продифференцируем по  $y$  тождество (32):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 S}{\partial y} = 0.$$

Если подставить этот результат в (34), то получим второе уравнение канонической системы. Теорема доказана.

**9. Кусочно-гладкие допустимые кривые.** Основная задача может не иметь решения в классе гладких допустимых кривых. Поэтому расширим класс допустимых кривых до кусочно-гладких кривых, под которыми будем понимать непрерывные функции  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y(a) = c$ ,  $y(b) = d$ , имеющие непрерывные производные всюду на  $[a, b]$  за исключением, возможно, конечного числа точек, в которых производные терпят разрывы первого рода (рис. VI.12).

Анализируя доказательство теоремы 2, приведенное в п. 5, нетрудно заметить, что непрерывность функции  $y_x(x)$  использовалась только при переходе от интеграль-

ного уравнения Эйлера (20) к дифференциальному (11). При этом переход остается законным во всех точках непрерывности функции  $y_x(x)$ , т. е. между точками излома слабая минималь удовлетворяет уравнению Эйлера. В точках разрыва правая функция в (20) остается непрерывной. Следовательно, в (20) будет непрерывна и левая функция:

$$\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \Big|_{x=x_i-0} = \frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x} \Big|_{x=x_i+0}, \quad (35)$$

т. е. каноническая переменная  $p(x)$  непрерывна в каждой точке излома  $x_i$  слабой минималь. В этом состоит первое условие Вейерштрасса — Эрдмана. Второе условие Вейерштрасса — Эрдмана утверждает, что в точке излома слабой минималь непрерывна и функция Гамильтона  $H(x, y^0(x), p^0(x))$ , т. е.

$$\begin{aligned} & (F(x, y^0, y_x^0) - y_x^0 \partial F(x, y^0, y_x^0) / \partial y_x) \Big|_{x=x_i-0} = \\ & = (F(x, y^0, y_x^0) - y_x^0 \partial F(x, y^0, y_x^0) / \partial y_x) \Big|_{x=x_i+0}. \end{aligned}$$

Этот результат будет доказан в гл. VII.

**10. Пример.** Значение вариационного исчисления определяется не только тем, что с его помощью были решены сложные задачи в механике, физике и других приложениях, но и тем, что многие общие законы развития реальных процессов допускают исключительно простую вариационную формулировку. В механике и физике универсальное значение имеет *принцип наименьшего действия*, согласно которому движение системы на отрезке  $[a, b]$  происходит так, что вдоль него *интеграл действия*  $\int_a^b L(x, y, y_x) dx$ , где  $L = T - U$  — *лагранжиан системы* (разность кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергий), принимает *стационарное значение*, т. е.  $\delta \int_a^b L(x, y, y_x) dx = 0$ .

Для иллюстрации полученных выше необходимых условий слабого минимума рассмотрим задачу о брахистохроне.

Поскольку  $F(x, y, y_x) = \sqrt{(1 + y_x^2)/2gy}$ , то уравнение Эйлера имеет вид

$$\begin{aligned} -g \sqrt{1 + y_x^2} / 2gy \sqrt{2gy + y_x^2 / 2y} \sqrt{2gy(1 + y_x^2)} - y_{xx} / (1 + y_x^2) \sqrt{2gy(1 + y_x^2)} = 0, \end{aligned}$$

т. е.  $2uy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0$ . Выражение  $y(1 + y_x^2) = c$  является первым интегралом уравнения Эйлера:  $d[y(1 + y_x^2)]/dx = y_x(1 + y_x^2 + 2uy_{xx}) = 0$ .



Из выражения первого интеграла имеем  $y_x = \sqrt{(c-y)/y}$ . Подстановка  $y = c \sin^2 t/2$  приводит к уравнению  $dx = c \sin^2 t/2 \cdot dt = c(1 - \cos t)dt/2$ , откуда  $x = c_1 + c(t - \sin t)/2$ ,  $y = c(1 - \cos t)/2$ . Произвольные постоянные  $c, c_1$  выбираются из условия, что кривая  $y(x)$  проходит через начало координат и точку  $B$ . Поэтому  $c_1 = 0$ .

Система уравнений  $x = c(t - \sin t)/2$ ,  $y = c(1 - \cos t)/2$  является уравнением циклоиды в параметрической форме. Следовательно, брахистохроной может быть лишь дуга циклоиды.

### § 3. Исследование второй вариации

В предыдущем параграфе методом вариаций получены необходимые условия слабого минимума первого порядка, основанные на исследовании первой вариации функционала основной задачи вариационного исчисления. Новые необходимые условия слабого минимума, а также достаточные условия слабого минимума получаются при исследовании методом вариаций второй вариации функционала. В данном параграфе излагаются некоторые классические условия слабого минимума второго порядка.

**1. Присоединенная задача о минимуме.** Если обозначить

$$\begin{aligned} \omega(x, h, h_x) = & h^2 \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y^2 + \\ & + 2hh_x \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y \partial y_x + \\ & + h_x^2 \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y_x^2, \end{aligned} \quad (1)$$

то выражение (5) § 2 для второй вариации  $\delta^2 I(y, h)$  функционала основной задачи вдоль допустимой кривой  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , примет вид

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \omega(x, h, h_x) dx. \quad (2)$$

Задача минимизации второй вариации (2) на вариациях  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , допустимой кривой  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , называется *присоединенной задачей о минимуме* (соответствующей допустимой кривой  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ).

Поскольку  $\delta^2 I(y^0, h) \geq 0$  на всех вариациях  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$  (см. теорему 1 § 1), то присоединенная задача о минимуме вдоль слабой минимали  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , всегда имеет решение  $h^0(x) \equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ , причем  $\delta^2 I(y^0, h^0) = 0$ .

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \omega}{\partial h} - \frac{d}{dx} \frac{d\omega}{dh_x} = 0, \quad (3)$$

составленное по функционалу (2) присоединенной задачи о минимуме, называется *уравнением Якоби* основной задачи вариационного исчисления. В подробной записи (с учетом выражения (1) и при  $h(x) \in C^{(2)}$ ) уравнение Якоби представляет линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a(x)h_{xx} + b(x)h_x + c(x)h = 0 \quad (4)$$

с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} a(x) &= \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y_x^2, \quad b(x) = \\ &= d/dx \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y_x^2, \quad c(x) = d/dx \partial^2 F(x, y(x), \\ & y_x(x)) / \partial y \partial y_x - \partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y^2. \end{aligned} \quad (5)$$

**2. Условие Лежандра — Клебша.** С помощью метода вариаций докажем следующее необходимое условие слабого минимума второго порядка.

**Теорема 1.** Вдоль каждой минимали  $y^0(x) \in C^{(1)}$ ,  $x \in [a, b]$ , выполняется условие *Лежандра — Клебша*

$$\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^2 \geq 0, \quad x \in ]a, b[.$$

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна и при  $\Theta \in ]a, b[$  выполняется неравенство

$$\partial^2 F(\Theta, y^0(\Theta), y_x^0(\Theta)) / \partial y_x^2 = \alpha < 0. \quad (6)$$

Рассмотрим вариацию (рис. VI.9)

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin^2 \pi(x - \Theta + \varepsilon) / 2\varepsilon, \quad x \in ]\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon[; \quad h(x) \equiv 0, \\ & x \in ]\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon[, \end{aligned} \quad (7)$$

для которой

$$\begin{aligned} h_x(x) &= \pi / 2\varepsilon \cdot \sin \pi(x - \Theta + \varepsilon) / \varepsilon, \quad x \in ]\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon[; \\ h_x(x) &\equiv 0, \quad x \in ]\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon[. \end{aligned} \quad (8)$$

Вторая вариация функционала  $\delta^2 I(y, h)$  (2) с учетом (7), (8) равна

$$\delta^2 I(y^0, h) = \int_{\Theta - \varepsilon}^{\Theta + \varepsilon} \omega^0(x, h, h_x) dx, \quad (9)$$

где  $\omega^0(x, h, h_x)$  — выражение (1) вдоль  $y = y^0(x)$ . Из (7), (8) видно, что при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  числа  $h_x(x)$  во

сколь угодно раз превосходят числа  $h(x)$ . Другими словами, в выражении (1) при малых  $\varepsilon > 0$  наибольшим становится последнее слагаемое  $h_x^2 \partial^2 F / \partial y_x^2$ , которое, следовательно, вносит основной вклад во вторую вариацию (9). В силу (6) и непрерывности функции  $\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^2$ ,  $x \in [a, b]$ , найдется такое достаточно малое число  $\varepsilon > 0$ , что  $\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^2 < 0$ ,  $x \in ]\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon[$ . Подставив это неравенство в (9) и учитывая предыдущие рассуждения, получим неравенство  $\delta^2 I(y^0, h) <$

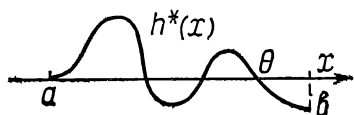


Рис. VI.13

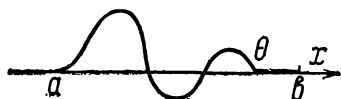


Рис. VI.14

$< 0$ , противоречащее необходимому условию минимума  $\delta^2 I(y^0, h) \geq 0$ . Теорема доказана.

**3. Условие Якоби.** Говорят, что вдоль допустимой кривой  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , точка  $x^* \in ]a, b[$  сопряжена с точкой  $a$ , если существует такое нетривиальное решение  $h(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ , уравнения Якоби (4), что  $h(a) = 0$ ,  $h(x^*) = 0$ .

**Теорема 2 (Якоби).** Вдоль неособой минимали  $y^0(x) \in C^{(1)}$ ,  $x \in [a, b]$ , не существует точек  $x^* \in ]a, b[$ , сопряженных с  $a$ .

**Доказательство.** Рассуждаем от противного: вдоль  $y^0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , существует точка  $\Theta \in ]a, b[$ , сопряженная с  $a$ . Пусть  $h^*(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ , — соответствующее решение уравнения Якоби (рис. VI.13). Ясно, что

$$h_x^*(\Theta - 0) \neq 0, \quad (10)$$

иначе, в силу теорем существования и единственности решений линейных дифференциальных уравнений получим тождество  $h^*(x) \equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Построим вариацию (рис. VI.14)

$$h(x) = \begin{cases} h^*(x), & x \in [a, \Theta], \\ 0, & x \in [\Theta, b]. \end{cases} \quad (11)$$

Подсчитаем вдоль нее вторую вариацию (2). Учитывая формулу Эйлера  $2\omega(x, h, h_x) = h \partial \omega / \partial h + h_x \partial \omega / \partial h_x$  для однородных (второй степени) функций, уравнение Яко-

би (3), которому удовлетворяет функция  $h^*(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и свойство  $h^*(a) = h^*(b) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta^2 I(y^0, h) &= \int_a^b \omega^0(x, h, h_x) dx = \int_a^\Theta \omega^0(x, h^*, h_x^*) dx = \\ &= 1/2 \int_a^\Theta (h^* \partial \omega^0 / \partial h + h_x^* \partial \omega^0 / \partial h_x) dx = 1/2 \int_a^\Theta (h^* d/dx \partial \omega^0 / \partial h_x + \\ &\quad + h_x^* \partial \omega^0 / \partial h_x) dx = 1/2 \int_a^\Theta d/dx (h^* \partial \omega^0 / \partial h_x) dx = \\ &= 1/2 h^*(x) \partial \omega^0 / \partial h_x \Big|_0^a = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вариация (11) — решение присоединенной задачи о минимуме.

Соотношение (10) вместе с  $h_x(\Theta + 0) = 0$  означает, что вариация (11) в точке  $x = \Theta$  имеет излом. Следовательно, при  $x = \Theta$  должно выполняться условие Вейерштрасса — Эрдмана (35) § 2:

$$\partial \omega^0 / \partial h_x \Big|_{x=\Theta-0} = \partial \omega^0 / \partial h_x \Big|_{x=\Theta+0},$$

которое в подробной записи имеет вид

$$\begin{aligned} [2h^* \partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y \partial y_x + 2h_x^* \partial^2 F(x, y^0(x), \\ y_x^0(x)) / \partial y_x^2]_{x=\Theta-0} = [2h^* \partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y \partial y_x + \\ + 2h_x^* \partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^2]_{x=\Theta+0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку  $h(\Theta - 0) = h(\Theta + 0) = 0$ ,  $h_x(\Theta + 0) = 0$ ,  $\partial^2 F(x, y^0(x), y_x^0(x)) / \partial y_x^2 > 0$ ,  $x \in ]a, b[$ , то из (12) получим равенства  $h_x(\Theta + 0) = 0$ ,  $h_x(\Theta - 0) = 0$ , противоречащие тому, что  $\Theta$  — точка излома вариации (11). Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Вариация (11), в отличие от ранее использованных вариаций, *нелокальная* в том смысле, что отлична от нуля на конечном интервале  $]a, \Theta[$ . В соответствии с этим необходимое условие слабого минимума второго порядка, содержащееся в теореме 2 (*условие Якоби*), представляет *нелокальное условие*, связанное с точками, удаленными друг от друга на конечное расстояние.

**4. Достаточные условия слабого минимума.** Простые примеры показывают, что ни одно из трех доказанных условий (стационарности, Лежандра и Якоби) не

является в отдельности достаточным условием слабого минимума. Однако в совокупности они близки к достаточным условиям слабого минимума.

Говорят, что допустимая кривая  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , удовлетворяет: 1) *усиленному условию Лежандра — Клебша*, если вдоль нее выполняется строгое неравенство  $\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))/\partial y_x^2 > 0$ ,  $x \in [a, b]$ ; 2) *усиленному условию Якоби*, если вдоль нее не существует точек  $x^* \neq a$  из замкнутого отрезка  $[a, b]$ , сопряженных с  $a$ .

**Теорема 3.** Допустимая кривая  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — слабая минимальная основная задачи вариационного исчисления, если: 1) является экстремалью; 2) удовлетворяет усиленному условию Лежандра — Клебша; 3) удовлетворяет усиленному условию Якоби.

**Доказательство.** Рассмотрим вторую вариацию функционала (1), (2). Интегрированием по частям преобразуем в нем второе слагаемое:

$$\int_a^b 2hh_x \frac{\partial F}{\partial y \partial y_x} dx = \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} d/dx h^2 dx = \int_a^b h^2 d/dx \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_x} dx. \quad (13)$$

Пусть

$$u(x) \in C^{(2)}, u(x) > 0, x \in [a, b], \quad (14)$$

есть произвольная функция.

Вычтем из второй вариации равное нулю выражение

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} h^2 \right) dx = \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} h^2 \Big|_a^b = 0. \quad (15)$$

С учетом (13), (15) из (2) получим

$$\begin{aligned} \delta^2 I(y, h) = & \int_a^b \left\{ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_x} - \frac{d}{dx} \left( \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right) \right] h^2 - \right. \\ & \left. - 2 \left[ \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right] h h_x - \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right] h_x^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Функцию  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , подберем так, чтобы подынтегральное выражение в фигурных скобках из (16) стало полным квадратом относительно  $h$ ,  $h_x$ . Для этого необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\left[ \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right]^2 \equiv \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_x} - \right. \\ \left. - \frac{d}{dx} \left( \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}. \quad (17)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u_x}{u} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} \right) = \left( \frac{u_{xx}u - u_x^2}{u^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} + \frac{u_x}{u} \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2},$$

то тождество (17) принимает вид

$$[-u_{xx}(\partial^2 F / \partial y_x^2) - u_x(d/dx \partial^2 F / \partial y_x^2) + \\ + (\partial^2 F / \partial y^2 - d/dx \partial^2 F / \partial y \partial y_x)] / u \cdot \partial^2 F / \partial y_x^2 \equiv 0,$$

т. е. с учетом обозначений (5) и условия 2) теоремы функция  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , должна удовлетворять уравнению

$$(a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u) / u = 0, \quad x \in [a, b].$$

По условию 3) теоремы уравнение Якоби

$$a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = 0 \quad (18)$$

не имеет нетривиальных решений  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , для которых  $u(a) = 0$ ,  $u(x^*) = 0$ ,  $x^* \in [a, b]$ . Из компактности множества  $[a, b]$  и непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий следует существование такого достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$ , что решение уравнения (18) с начальными условиями  $u(a - \varepsilon) = 0$ ,  $u_x(a - \varepsilon) = 1$  положительно на  $[a, b]$ . Таким образом, функция  $u(x)$ , удовлетворяющая условиям (14), (17), существует. Она позволяет записать (16) в виде

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \{ [\partial^2 F / \partial y_x^2]^{1/2} h_x - [\partial^2 F / \partial y^2 - d/dx \partial^2 F / \partial y \partial y_x - \\ - d/dx (u_x/u \cdot \partial^2 F / \partial y_x^2)]^{1/2} h \}^2 dx. \quad (19)$$

Из (19) видно, что  $\delta^2 I(y, h) \geq 0$  на всех вариациях  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Если допустить, что  $\delta^2 I(y, h^*) = 0$  при  $h^*(x) = 0$ ,  $x \in [a, b]$ , то в силу тождественного равенства нулю подынтегрального выражения (19) из условий  $\partial^2 F / \partial y_x^2 > 0$ ,  $h^*(a) = 0$  будет следовать, что  $h_x^*(a) = 0$ . Но функция  $h^*(x)$  как решение присоединенной задачи о мини-

муме (ибо  $\delta^2 I(y, h^*) = 0$ ) должна удовлетворять уравнению Якоби (4), которое при  $h^*(a) = h_x^*(a) = 0$  имеет единственное решение  $h^*(x) \equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\delta^2 I(y, h) > 0$  при  $h(x) \not\equiv 0$ ,  $x \in [a, b]$ .

Рассмотрим функционал

$$\Phi(y, h) = \delta^2 I(y, h) - q/2 \int_a^b h_x^2(x) dx, \quad q > 0. \quad (20)$$

Уравнение Эйлера для него имеет вид

$$(a(x) - q) h_{xx} + b(x) h_x + c(x) h = 0. \quad (21)$$

Поскольку  $a(x) = \partial^2 F / \partial y_x^2 > 0$ ,  $x \in [a, b]$ , то найдется такое  $q > 0$ , что  $a(x) - q > 0$ ,  $x \in [a, b]$ . По предположению, решение уравнения Якоби (4) с начальными условиями

$$h(a) = 0, \quad h_x(a) = 1 \quad (22)$$

не обращается в нуль на множестве  $[a, b]$ . В силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров этим свойством при достаточно малых  $q$  будет обладать и решение уравнения (21) с начальными условиями (22). Повторив для функционала (20) преобразования, осуществленные выше со второй вариацией (12), получим неравенство  $\Phi(y, h) \geq 0$  для всех вариаций  $h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Это согласно (20) означает, что вторая вариация функционала на всех вариациях  $h(x)$  удовлетворяет неравенству

$$\delta^2 I(y, h) \geq q/2 \int_a^b h_x^2(x) dx. \quad (23)$$

Поскольку  $h(x) = \int_a^x h_x(s) ds$ , то, используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} h^2(x) &= \left( \int_a^x h_x(s) ds \right)^2 \leq (x - a) \int_a^x h_x^2(s) ds \leq \\ &\leq (b - a) \int_a^b h_x^2(x) dx, \quad x \in [a, b], \\ \int_a^b h^2(x) dx &\leq (b - a) \int_a^b h_x^2(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно, наряду с (23) выполняется неравенство

$$\delta^2 I(y, h) \geq q/2 (b-a) \int_a^b h^2(x) dx. \quad (24)$$

По определению (см. § 2), вторая вариация  $\delta^2 I(y, h)$  удовлетворяет соотношению

$$\Delta I(y) = I(y + \varepsilon h) - I(y) = \varepsilon \delta I(y, h) + \varepsilon^2/2 \cdot \delta^2 I(y, h) + o(\varepsilon^2, \|h\|^2),$$

где  $o(\varepsilon^2, \|h\|^2) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Учитывая это соотношение и то, что  $y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — экстремаль основной задачи ( $\delta I(y, h) = 0$ ), из (24) получим неравенство  $\Delta I(y) \geq 0$ , справедливое для всех слабых вариаций  $\delta y(x) = \varepsilon h(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $\int_a^b h^2(x) dx \leq \alpha$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , если  $\alpha < \infty$  и  $\varepsilon_0 > 0$  — достаточно малое число. Теорема доказана.

5. Пример. Рассмотрим задачу

$$I(y) = \int_0^\alpha (y_x^2 - y^2) dx \rightarrow \min, \quad y(0) = y(\alpha) = 0. \quad (25)$$

Запишем уравнение Эйлера  $y_{xx} + y = 0$ . Его общее решение (уравнение экстремалей):  $y(x) = c \sin x + d \cos x$ . Из краевых условий (25) получаем:  $y(0) = d = 0$ ,  $y(\alpha) = c \sin \alpha = 0$ , т. е. решение задачи (25) находится среди кривых  $y(x) = c \sin x$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $c \sin \alpha = 0$ .

Поскольку  $\partial^2 F / \partial y_x^2 = 2 > 0$ , то каждая экстремаль неособая, гладкая и вдоль нее выполняется условие Лежандра — Клебша.

Уравнение Якоби вдоль любой экстремали:  $h_{xx} + h = 0$ . Как следует из приведенных вычислений, каждое нетривиальное решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условию  $h(0) = 0$ , имеет вид  $h(x) = \gamma \cdot \sin x$ ,  $\gamma \neq 0$ . Следовательно, при  $0 < \alpha \leq \pi$  на множестве  $[0, \alpha]$  нет точек, сопряженных с  $x = 0$ , и экстремали удовлетворяют условию Якоби. Если  $\alpha < \pi$ , то выполнены условия теоремы 3, т. е. допустимая кривая  $y(x) = 0$ ,  $x \in [0, \alpha]$ , — слабая минималь задачи (25). При  $\alpha > \pi$  на отрезке  $[0, \alpha]$  существуют точки  $\Theta$  ( $\sin \Theta = 0$ ), сопряженные с  $x = 0$ , т. е. рассматриваемые экстремали не удовлетворяют условию Якоби и не могут быть решениями задачи (25). Поскольку других экстремалей в задаче (25) нет, то при  $\alpha > \pi$  задача (25) не имеет решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блiss Г. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950.



2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М.: Госиздат. физ.-мат. литературы, 1961.

3. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1941.

## Глава VII. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Теория оптимального управления*, отражающая современный этап развития вариационного исчисления (гл. VI), возникла в 50-е годы XX в. в связи с необходимостью решения ряда задач, поставленных практикой в различных областях развития новой техники. Эти задачи, являясь по математической сущности вариационными, не укладывались в рамки классических моделей и потребовали разработки новых методов их решения. В теории оптимального управления основным методом (результатом) признан *принцип максимума Понтрягина*, открытый в 1956 г. группой советских математиков во главе с Л. С. Понтрягиным. Большую роль в исследовании задач оптимального управления играет динамическое программирование Р. Беллмана (гл. V).

### § 1. Основная задача оптимального управления

Первой задачей математической теории оптимального управления, которая возникла как обобщение ряда инженерных задач построения оптимальных систем управления и в силу удачного сочетания содержащегося в ней комплекса вопросов стала основной, является задача быстрогодействия.

**1. Задача оптимального по быстродействию управления простейшим механическим движением.** Материальную точку единичной массы требуется с помощью горизонтальной силы, не превышающей по модулю единицы, за минимальное время переместить по горизонтальной прямой из начального положения  $A$ , в котором точка имела заданную скорость  $v_0$ , в конечное положение  $B$  с заданным значением  $v_1$  скорости (рис. VII.1).

Математическую постановку задачи начнем с описания поведения *объекта управления* — движения материальной точки. Согласно закону Ньютона движение точки вдоль оси  $Ox$  описывается уравнением

$$\ddot{x} = u, \quad (1)$$

где  $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$  — ускорение точки в момент времени  $t$ ;

$u(t)$  — величина силы, приложенная в момент  $t$  к объекту управления.

Из физической постановки задачи следуют ограничения на  $x(t)$ :

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0; x(t_1) = \beta, \dot{x}(t_1) = v_1, \quad (2)$$

где  $\dot{x} = dx/dt$  — скорость точки;  $t=0$  — начальный момент;  $t=t_1$  — конечный момент движения.

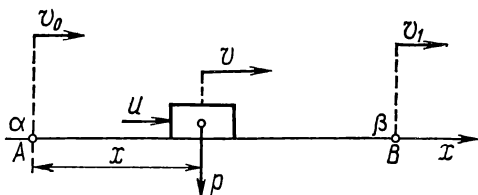


Рис. VII.1

По предположению, ограничены и значения прилагаемой к точке силы  $u$ :

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3)$$

В первых инженерных постановках задач, аналогичных рассматриваемой, допускались законы  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , изменения силы  $u$ , которым соответствовали кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ .

Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи состоит в поиске такой кусочно-непрерывной функции  $u^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , стесненной ограничением (3),  $t_1 = t_1^0$ , чтобы соответствующее ей решение  $x^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , уравнения (1) удовлетворяло краевым условиям (2) и конечный момент  $t_1^0$  был минимально возможным.

Если перейти к фазовым переменным  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  (переменным состояния объекта управления), то сформулированная задача принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad x_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= v_0, \quad x_1(t_1) = \beta, \quad x_2(t_1) = v_1, \quad t_1 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4)$$

и на геометрическом языке означает построение на фазовой плоскости  $\{x_1, x_2\}$  такой траектории  $x^0(t) = \{x_1^0(t),$

$x_2^0(t)$  системы (1), которая за кратчайшее время  $t_1^0$  переходит из точки  $A = \{0, v_0\}$  в точку  $B = \{\beta, v_1\}$  (рис. VII.2).

В такой интерпретации данная задача управления движением похожа на задачу о брахистохроне из вариационного исчисления (§ 1 гл. VI). Однако дополнительные ограничения (3) в течение долгого времени не позволяли использовать результаты вариационного исчисления

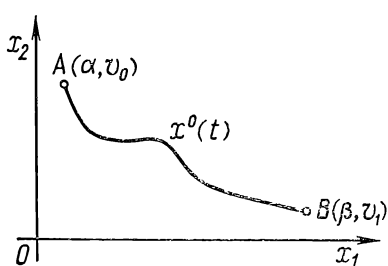


Рис. VII.2

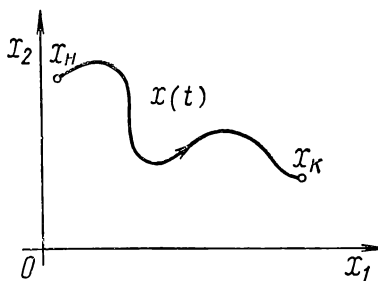


Рис. VII.3

для решения задач оптимального управления типа рассматриваемой задачи.

**2. Постановка основной задачи оптимального управления.** Рассмотрим некоторый объект, поведение которого в  $n$ -мерном фазовом пространстве  $R_n$  описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5)$$

где  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  — состояние;  $\dot{x} = dx/dt$  — скорость объекта;  $u = \{u_1, \dots, u_r\}$  — вектор управления.

Пусть в  $r$ -мерном пространстве  $R_r$  задано множество  $U \subset R_r$ . Кусочно-непрерывную функцию  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , принимающую значения из  $U: u(t) \in U$ ,  $t \geq 0$ , назовем *доступным управлением*.

Доступное управление  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , и соответствующую ему непрерывную кусочно-гладкую траекторию  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , системы (5) назовем *допустимыми*, если для заданных точек  $x_H, x_K \in R_n$  при некотором  $0 < t_1 < \infty$  выполняются равенства

$$x(0) = x_H, \quad x(t_1) = x_K. \quad (6)$$

*Задача быстродействия (основная задача оптимального управления)* состоит в следующем: среди допусти-

мых управлений найти такое  $u^0(t)$ ,  $t \geq 0$ , которое переводит траекторию  $x^0(t)$ ,  $t \geq 0$ , из  $x_n$  в  $x_k$  за минимально возможное время  $t_1^0$  (рис. VII. 3).

Траектория  $x^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , и порождающее ее допустимое управление  $u^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , называются *оптимальными*;  $t_1^0$  — время *быстродействия*.

Приведем без доказательства *теорему существования оптимальных управлений*: если множество допустимых траекторий системы (5) с  $f(x, u) \in C$  непусто и ограничено, а *множество допустимых скоростей*

$$f(x, U) = \{y: y = f(x, u), u \in U\} \quad (7)$$

— выпуклый компакт, то задача быстродействия имеет решение в классе измеримых функций.

**З а м е ч а н и е.** Если в конкретной задаче условие (7) не выполняется, то эта задача может не иметь решения в принятом смысле. В этом случае можно перейти к *расширению по Гамкрелидзе*, в котором, в частности, множество  $f(x, U)$  заменяется на выпуклую оболочку

$$\left\{ y: y = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, u_i), u_i \in U, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\},$$

а вместо (5) рассматривается уравнение

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x, u_i), u_i \in U, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$$

с управлениями  $u_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Расширенная задача имеет решение, и по нему можно построить минимизирующую последовательность допустимых управлений для исходной задачи.

**3. Обсуждение.** Присутствие дифференциального уравнения (5) в постановке основной задачи оптимального управления делает ее сходной с задачами вариационного исчисления с дифференциальными связями

$$\Phi_i(y, y_x) = 0, i = \overline{1, n+r}. \quad (8)$$

В (5) рассматривается частный случай соотношений (8), когда последние разрешены относительно части производных  $dy_j/dx$ ,  $j = j_1, \dots, j_n$ , а остальные производные обозначены через  $u_k$ ,  $k = \overline{1, r}$ . Как уже отмечалось (гл. VI), задачи вариационного исчисления представ-

ляют собой специальные случаи экстремальных задач в функциональных пространствах. Приведенное сравнение задачи быстродействия с задачами из гл. VI показывает, что в теории оптимального управления исследуются еще более специальные случаи общих экстремальных задач. Подобное «упрощение» исследуемых задач оказалось не недостатком новой теории, а ее существенным достоинством, ибо 1) основные результаты вариационного исчисления следуют из теории оптимального управления, 2) в теории оптимального управления в силу специфики ее задач получены результаты, которые или невозможно получить, или получаются весьма трудным путем методами классического вариационного исчисления, 3) многие прикладные задачи современной техники, экономики и других областей человеческой деятельности естественно моделируются в рамках теории оптимального управления.

На формирование основной модели задач оптимального управления большое влияние оказало *автоматическое управление* — область современной техники, получившая развитие со второй половины 40-х гг. XX в. Это нашло отражение и в основных терминах теории. Аналогичное явление наблюдалось и в других математических теориях. Например, на развитие вариационного исчисления заметное влияние оказывала механика, на линейное программирование — экономика.

В поставленной выше задаче быстродействия, как и в других задачах оптимального управления, оптимизация ведется не в пространстве траекторий  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , а в пространстве управлений, выбор которых через уравнение (5) сказывается в первую очередь на изменении скорости  $\dot{x}$  системы. Напомним, уже в вариационном исчислении (гл. VI) было обнаружено, что аналогичный переход от  $y(x)$  к  $y_x(x)$  позволяет получить новые результаты. В частности, фундаментальный факт данной главы (принцип максимума Понтрягина) существенно опирается на представление об управлении как основном объекте оптимизации.

Трудность переноса методов классического вариационного исчисления на задачи оптимального управления связана как с рассмотрением довольно широкого класса кусочно-непрерывных функций (вместо ранее рассматриваемых гладких и непрерывных функций), так и (это главное) с необходимостью учета ограничения (6), в ко-

тором множество  $U$  могло быть и замкнутым. Следует подчеркнуть, что принятые в теории оптимального управления классы допустимых управлений были вызваны не желанием математиков получить наиболее общие результаты, а тем, что к моменту создания основ теории оптимального управления были известны достаточно содержательные примеры прикладных задач с кусочно-непрерывными оптимальными управлениями, принимающими только граничные значения из  $U$ .

Задачу быстродействия называют основной не только потому, что именно для нее впервые сформулирован и доказан *основной результат теории оптимального управления* — принцип максимума Понтрягина, но и потому, что в ней отчетливо проявились главные особенности нового класса задач вариационного типа. Исходя из задачи быстродействия сформулируем *основные проблемы теории оптимального управления*. Первая проблема, возникающая при решении прикладной задачи оптимального управления, называется *проблемой идентификации (реализации)* и состоит в математическом описании (моделировании) исследуемого объекта, процесса. В задаче быстродействия было принято, что модель имеет вид (5). В приложениях встречаются и многие другие типы моделей. При моделировании широко используются специальные законы областей науки и техники, к которым относится исследуемая задача, а также результаты экспериментов над физическими объектами. Следующей за проблемой идентификации является *проблема управляемости*, в которой выясняется вопрос о существовании хотя бы одной допустимой траектории.

С проблемой управляемости тесно связана *проблема наблюдаемости*. Суть ее такова. В прикладных задачах вектор состояния  $x$  в соотношениях оптимальности, как правило, не доступен непосредственному измерению, а измеряются другие (*выходные*) величины, связанные определенным образом с состоянием (или траекторией). Система считается наблюдаемой, если по доступным измерениям можно восстановить состояние системы. Далее выделяется *проблема существования оптимальных управлений*, т. е. вопрос о существовании в классе допустимых управлений наилучшего управления, которое доставляет принятому критерию качества оптимальное значение. Эта проблема значительно трудней аналогичной проблемы нелинейного программирования.

Если задача оптимального управления имеет решение, то нужно выделить среди допустимых управлений более узкое множество функций, содержащее оптимальные управления. В этом состоит *проблема необходимых условий оптимальности*. Составление соотношений, выполнение которых на допустимых управлениях гарантирует оптимальность последних, является основным вопросом *проблемы достаточных условий оптимальности*. Конечной и основной проблемой теории оптимального управления считается *проблема вычислительных методов*. По каждой из перечисленных проблем за последние двадцать пять лет получены крупные результаты. Теория оптимального управления продолжает развиваться в направлении как углубления классических задач, так и решения новых задач, возникающих в приложениях.

## § 2. Принцип максимума Понтрягина

*Принципом максимума* называется основное необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, связанное с максимизацией гамильтониана задачи. Это самое сильное из известных необходимых условий первого порядка. В данном параграфе принцип максимума доказывается для *простейшей задачи терминального управления*, которая весьма удобна при получении «чистого» результата.

**1. Постановка простейшей задачи терминального управления.** Пусть поведение объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор состояния;  $u$  —  $r$ -вектор управления;  $t$  — скаляр (время),  $t_0, x_0$  — начальные момент и состояние;  $t_1$  — конечный момент времени.

Класс доступных управлений сохраним таким же, как в основной задаче § 1: это кусочно-непрерывные  $r$ -векторные функции, удовлетворяющие условию

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \quad (2)$$

Он совпадает с классом допустимых управлений, поскольку дополнительные ограничения на траектории системы накладываться не будут.

Качество допустимого управления оценим функционалом (*критерием качества, целевым функционалом*)

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (3)$$

заданным на конечных (*терминальных*) состояниях системы (1) (рис. VII.3). Задача (1) — (3) называется простейшей задачей терминального управления. Ее решение — допустимое управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующая ему траектория  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , называются *оптимальным управлением* и *траекторией* (в задаче (1) — (3)). При исследовании задачи (1) — (3) будем предполагать, что непрерывны функции  $f(x, u, t)$ ,  $\partial f(x, u, t)/\partial x$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\partial \varphi/\partial x$ .

**2. Формула приращения критерия качества.** Рассмотрим два допустимых управления  $u(t)$ ,  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующие им траектории  $x(t)$ ,  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ ,  $t \in T$ , системы (1). Найдем формулу для приращения

$$\Delta I(u) = I(\bar{u}) - I(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) \quad (4)$$

критерия качества (3). При сделанных предположениях выражение (4) можно записать в следующем виде:

$$\Delta I(u) = \Delta x'(t_1) \partial \varphi(x(t_1)) / \partial x + o(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (5)$$

Приращение траектории  $\Delta x(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \dot{x} = f(x + \Delta x, \bar{u}, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0, \quad t \in T, \quad (6)$$

которое можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} = & \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \Delta x + \Delta_{\bar{u}} f(x, u, t) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\bar{u}} f(x, u, t)}{\partial x} \Delta x + o_1(\|\Delta x\|), \quad \Delta x(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь обозначено:  $\Delta_{\bar{u}} f(x, u, t) = f(x, \bar{u}, t) - f(x, u, t)$ ,  $\partial f/\partial x = \{\partial f_i/\partial x_j, i = 1, n; j = 1, n\}$ . Введем  $n \times n$ -матричную функцию  $F(t)$ ,  $t \in T$ , — решение уравнения

$$\dot{F} = AF, \quad F(0) = E, \quad (8)$$

где  $A = A(t) = \partial f(x(t), u(t), t)/\partial x$ ;  $E$  — единичная диагональная  $n \times n$ -матрица. Стандартными рассуждениями теории дифференциальных уравнений показывается, что уравнение (7) эквивалентно интегральному уравнению



$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t F(t) F^{-1}(\tau) \Delta_{\bar{u}} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \\ + \int_{t_0}^t F(t) F^{-1}(\tau) [\partial \Delta_{\bar{u}} f(x, u, \tau) / \partial x \cdot \Delta x + o_1(\|\Delta x(\tau)\|)] d\tau.$$

Поэтому вместо (5) можно записать:

$$\Delta I(u) = [\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) \Delta_{\bar{u}} f(x, u, t) dt + \\ + [\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x]' \int_{t_0}^{t_1} F(t_1) F^{-1}(t) [\partial \Delta_{\bar{u}} f(x, u, t) / \partial x \cdot \Delta x + \\ + o_1(\|\Delta x(t)\|)] dt + o(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (9)$$

Обозначим

$$\psi(t) = -[F^{-1}(t)]' F'(t_1) \partial \varphi(x(t_1)) / \partial x, \quad H(x, \psi, u, t) = \\ = \psi' f(x, u, t),$$

$$\Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \bar{u}, t) - H(x, \psi, u, t).$$

Тогда из выражения (9) получим искомую формулу приращения

$$\Delta I(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t) dt + \eta. \quad (10)$$

Здесь

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|),$$

$$\eta_2 = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x' \partial \Delta_{\bar{u}} H(x, \psi, u, t) / \partial x dt,$$

$$\eta_3 = - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) o_1(\|\Delta x(t)\|) dt.$$

В силу (8) функция  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi} = -A' \psi, \quad \psi(t_1) = -\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x, \quad (11)$$

которое называется *сопряженной системой* (вдоль  $u(t)$ ,  $t \in T$ ). Компоненты  $\psi_1, \dots, \psi_n$  вектора  $\psi$  называют *сопряженными переменными*. Функцию  $H(x, \psi, u, t)$  принято

называть *гамильтонианом* \*). Гамильтониан позволяет записать основные уравнения (1), (11) в компактном и симметричном виде:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

**3. Игольчатая вариация.** Основной метод теории оптимального управления, как и вариационного исчисления, — метод вариаций. Однако вариации теории оптимального

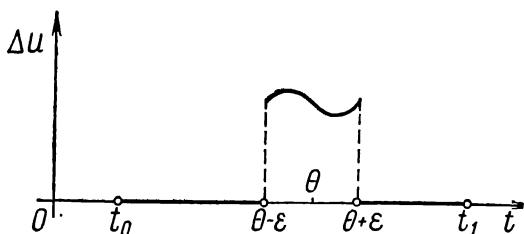


Рис. VII.4

управления принципиально отличаются от вариаций гл. VI. Простейшая вариация нового типа

$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon], \\ v - u(t), & t \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon], \quad v \in U, \quad \theta \in ]t_0, t_1[, \quad \varepsilon \neq 0, \end{cases} \quad (12)$$

изображена на рис. VII.4 и называется *игольчатой*. Вариации из гл. VI были равномерно малыми на  $[t_0, t_1]$ , малость игольчатой вариации определяется малостью длины отрезка, на котором вариация отлична от нуля.

Как покажут последующие вычисления, при малых  $\varepsilon$  траектория  $\bar{x}(t)$ , порожденная игольчатой вариацией, мало отличается от  $x(t)$ :

$$\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K|\varepsilon|, \quad t \in T, \quad (13)$$

но ее производная  $d\bar{x}/dt$  из-за произвольности вектора  $v \in U$  может сильно отличаться от  $dx/dt$ . Поэтому говорят, что игольчатая вариация — *сильная вариация*, а ва-

\*) Это предложение Л. С. Понтрягина; другие ученые называют ее *функцией Понтрягина*, ибо она отличается от своего аналога из вариационного исчисления (гл. VI).

риации гл. VI — *слабые вариации*. Сильные вариации используются для исследования сильных минималей, которым в теории оптимального управления соответствуют определенные выше (сильные) оптимальные траектории.

Для доказательства свойства (13) рассмотрим решение уравнения (6) на игольчатой вариации. На отрезке  $[t_0, \Theta - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , уравнение (6) имеет вид  $\Delta \dot{x} = \dot{f}(x + \Delta x, u, t) - \dot{f}(x, u, t)$ ,  $\Delta x(t_0) = 0$ , и допускает единственное решение  $\Delta x(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_0, \Theta - \varepsilon]$ . Запишем уравнение (6) на отрезке  $[\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon]$ :  $\Delta \dot{x} = \dot{f}(x + \Delta x, v, t) - \dot{f}(x, u, t)$ ,  $\Delta x(\Theta - \varepsilon) = 0$ . Из интегральной непрерывности решений дифференциальных уравнений следует существование такого числа  $K_1$ , что  $\|\Delta x(t)\| = \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K_1 t$ ,  $t \in [\Theta - \varepsilon, \Theta + \varepsilon]$ , т. е. свойство (13) имеет место на отрезке  $[\Theta + \varepsilon, t_1]$ . Наконец, на отрезке  $[\Theta + \varepsilon, t_1]$  уравнение (6) имеет вид  $\Delta \dot{x} = \dot{f}(x + \Delta x, u, t) - \dot{f}(x, u, t)$ ,  $\Delta x(\Theta + \varepsilon) \sim K_1 |\varepsilon|$ . Используя непрерывную зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных данных, заключаем, что при некотором  $K_2 < \infty$  выполняется неравенство  $\|x(t)\| \leq K_2 |\varepsilon|$ ,  $t \in [\Theta + \varepsilon, t_1]$ . Таким образом, свойство (13),  $K = \max\{K_1, K_2\}$ , доказано.

**4. Принцип максимума.** Говорят, что допустимое управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет *условию максимума*, если вдоль него и соответствующих ему траекторий  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , исходной (1) и сопряженной (11) систем гамильтониан системы достигает максимума:

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t), \\ t \in ]t_0, t_1[. \quad (14)$$

**Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина).** Каждое оптимальное управление удовлетворяет условию максимума.

**Доказательство.** Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное управление,  $x^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , — соответствующие ему решения систем (1), (11). Предположим, что теорема неверна, т. е. при некоторых  $\Theta \in ]t_0, t_1[$ ,  $v \in U$  выполняется неравенство  $H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), v, \Theta) - H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \Delta_v H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \alpha > 0$ . Про-варьируем управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , игольчатой вариацией (12) и вычислим по (10) приращение критерия качества

$$\Delta I(u^0) = I(u^0 + \Delta u) - I(u^0) = - \int_{\Theta - \varepsilon}^{\Theta + \varepsilon} \Delta_v H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt + \eta. \quad (15)$$

С учетом (12), (13) получаем:  $\int_{\Theta-\varepsilon}^{\Theta+\varepsilon} \Delta_v H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt = 2\varepsilon \Delta_v H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) + o_2(\varepsilon) = 2\varepsilon\alpha + o_2(\varepsilon)$ ,  $o_2(\varepsilon) \leq K_2\varepsilon^2$ ;  $\eta_1 \leq K_3\varepsilon^2$ ,  $\eta_2 \leq K_4\varepsilon^2$ ,  $\eta_3 \leq K_5\varepsilon^2$ . Подставив эти оценки в (15), приходим к неравенству  $\Delta I(u^0) \leq -2\varepsilon\alpha + K_6\varepsilon^2$ , которое при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  принимает вид  $\Delta I(u^0) < 0$ , противоречащий определению оптимальности  $\Delta I(u^0) \geq 0$ . Теорема доказана.

### 5. Обсуждение.

Как видно из теоремы 1, принцип максимума является необходимым условием оптимальности первого порядка (в его формулировке используются производные от элементов задачи не выше первого порядка). Многочисленные исследования показали, что он представляет самое сильное из известных необходимых условий оптимальности первого порядка и из него следует

большинство других результатов теории оптимального управления и вариационного исчисления (см. § 4). Однако в общем случае принцип максимума не есть достаточное условие оптимальности, т. е. не каждое допустимое управление, удовлетворяющее принципу максимума (экстремаль Понтрягина), является оптимальным.

**Пример.**  $\dot{x}_1 = u$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1^2$ ,  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,  $T = [0, 1]$ ,  $|u| \leq 1$ ,  $I(u) = \varphi(x(1)) = x_2(1) \rightarrow \min$ . Гамильтониан:  $H = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2$ . Сопряженная система:  $\dot{\psi}_1 = -\partial H / \partial x_1 = 2\psi_2 x_1$ ,  $\dot{\psi}_2 = -\partial H / \partial x_2 = 0$ ,  $\psi_1(1) = -\partial \varphi(x(1)) / \partial x_1 = 0$ ,  $\psi_2(1) = -1$ .

Отсюда  $\psi_2(t) \equiv -1$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\psi_1(t) = -2 \int_t^1 x_1(\tau) d\tau$ . Рассмотрим

допустимое управление  $u(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , вида  $u(t) \equiv 1$ ,  $t \in [0, 1/3]$ ;  $u(t) \equiv -1$ ,  $t \in [1/3, 1]$  (рис. VII.5). Первая компонента  $x_1(t)$  допустимой траектории имеет вид  $x_1(t) = t$ ,  $t \in [0, 1/3]$ ;  $x_1(t) = -t + 2/3$ ,  $t \in [1/3, 1]$ . На рис. VII.5 изображена и функция  $\psi_1(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Поскольку  $u(t) = \text{sign } \psi_1(t)$ , то рассматриваемое управление удовлетворяет принципу максимума. Но оно не является оптимальным, ибо  $I(u) = -1/27$ , а на допустимом управлении  $\bar{u}(t) \equiv 1$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $I(\bar{u}) = -1/3$ .

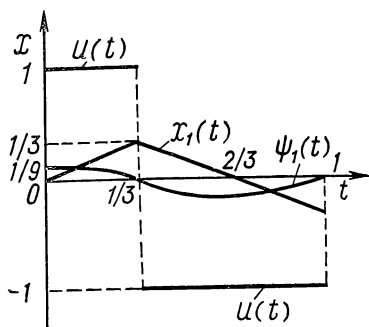


Рис. VII.5

**6. Решение задачи терминального управления методом динамического программирования.** Задачу (1) — (3) погрузим в семейство задач

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(\tau) = x, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_\tau = [\tau, t_1], \quad (16)$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min,$$

зависящее от параметров: скалярного  $\tau$  и  $n$ -векторного  $x$ .

Минимальное значение критерия качества  $I(u)$  на общей задаче семейства обозначим через  $B(x, \tau)$  (функция Беллмана). Для получения уравнения Беллмана на отрезке  $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ ,  $\Delta\tau > 0$ , выберем управление  $u(t) = v(t)$ ,  $t \in [\tau, \Delta\tau]$ . Под действием этого управления система (16) из состояния  $x(\tau) = x$  перейдет в состояние

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \Delta\tau f(x(\tau), v(\tau), \tau) + o(\Delta\tau). \quad (17)$$

Предположим, что с момента  $t = \tau + \Delta\tau$  из состояния  $x(\tau + \Delta\tau)$  система (16) управляется с помощью  $u(t) = u(t | x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ ,  $t \in [\tau + \Delta\tau, t_1]$ , оптимальным образом. Согласно определению функции Беллмана критерий качества при этом достигнет значения  $B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ . Таким образом, на управлении  $u(t) = v(t)$ ,  $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ ,  $u(t) = u(t | x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau)$ ,  $t \in [\tau + \Delta\tau, t_1]$ , критерий качества достигает значения

$$B(x(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) \leq B(x, \tau). \quad (18)$$

Если в качестве  $v(t)$ ,  $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$ , взять отрезок оптимального управления  $u(t | x, \tau)$  в задаче (16), то, очевидно,

$$B(x^0(\tau + \Delta\tau), \tau + \Delta\tau) = B(x, \tau). \quad (19)$$

Предположим, что  $B(x, \tau) \in C^{(1)}$ . Тогда из (18), (19) получим

$$B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, v(\tau), \tau) \Delta\tau + o(\tau) \leq B(x, \tau),$$

$$B(x, \tau) + \frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} \Delta\tau + \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, u^0(\tau), \tau) \Delta\tau + o(\tau) = B(x, \tau). \quad (20)$$

Сократив на  $B(x, \tau)$  и разделив затем обе части (20) на  $\Delta\tau$ , после  $\Delta\tau \rightarrow 0$  придем к уравнению Беллмана \*)

\*) Уравнение Беллмана представляет современный аналог уравнения Гамильтона — Якоби (п. 8 § 2 гл. VI).

$$-\frac{\partial B(x, \tau)}{\partial \tau} = \min_{v \in U} \frac{\partial B'(x, \tau)}{\partial x} f(x, v, \tau), \quad (21)$$

которое представляет уравнение в частных производных, осложненное операцией минимизации.

Для уравнения (21) из определения функции Беллмана получается следующее граничное условие:

$$B(x, t_1) = \varphi(x). \quad (22)$$

Существует тесная связь между принципом максимума Понтрягина и уравнением Беллмана: если  $u^0(t)$ ,  $x^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное управление и соответствующие ему решения исходной и сопряженной систем, а  $B(x, t) \in C^{(2)}$  — решение уравнения Беллмана (21), (22), то

$$\psi^0(t) = -\frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial x}, \quad t \in T. \quad (23)$$

Действительно, из (21) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'(x^0(t), t)}{\partial x} f(x^0(t), u^0(t), t) &\equiv -\frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial B'(x, t)}{\partial x} f(x, u^0(t), t) &\geq -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t}, \quad x \neq x^0(t), \end{aligned}$$

т. е. функция  $f'(x, u^0(t), t) \partial B(x, t) / \partial x + \partial B(x, t) / \partial t$  в каждый момент  $t \in T$  по аргументу  $x$  достигает максимума в точке  $x = x^0(t)$ . Запишем для нее условие стационарности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial B'(x^0(t), t)}{\partial x} \times \\ \times \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x \partial t} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

С другой стороны, вдоль  $u^0(t)$ ,  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial B(x^0(t), t)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ &+ \frac{\partial^2 B(x^0(t), t)}{\partial x \partial t}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнив (24) с (25), заключаем, что функция  $\partial B(x^0(t), t) / \partial x$  удовлетворяет сопряженной системе (11). А поскольку согласно (22) имеет место равенство  $\partial B(x^0(t_1), t_1) / \partial x = \partial \varphi(x^0(t_1)) / \partial x$ , то в силу единственности решения системы (11) формула (23) выполняется.

Формула (23) позволяет дать наглядную геометрическую интерпретацию принципу максимума. В каждый момент  $t$  оптимальное управление  $u^0(t)$  доставляет системе скорость  $f(x^0(t), u^0(t), t)$ , имеющую максимальную проекцию на направление  $\psi^0(t)$  антиградиента функции Беллмана  $B(x, t)$  в точке  $x^0(t)$  (рис. VII.6).

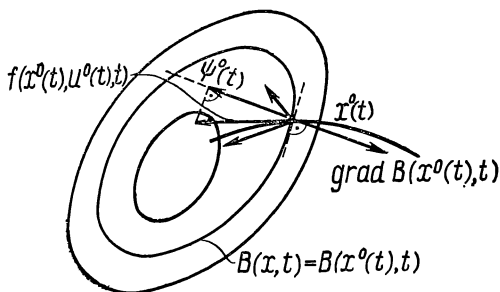


Рис. VII.6

**7. Достаточное условие оптимальности.** В п. 6 из уравнения (21) получен принцип максимума Понтрягина при довольно жестких предположениях. В современных работах уравнение (21) используется обычно для формулировки не необходимых, а достаточных условий оптимальности.

**Теорема 2.** Пусть  $B(x, t)$  — гладкое решение уравнения Беллмана (21) с краевым условием

$$B(x, t_1) = \varphi(x) + \lambda' g(x) \quad (\lambda \geq 0), \quad (26)$$

$u(x, t)$  — закон управления, удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial B'(x, t)}{\partial x} f(x, u(x, t), t) = \min_{u \in U} \frac{\partial B'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t). \quad (27)$$

Если уравнение

$$\dot{x} = f(x, u(x, t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

имеет решение  $x(t)$ ,  $t \in T$ , вдоль которого функция  $u(t) = u(x(t), t)$  кусочно-непрерывна и

$$g(x(t_1)) \leq 0, \quad \lambda' g(x(t_1)) = 0, \quad (28)$$

то управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , является оптимальным в задаче

$$\begin{aligned} I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \\ x(t_0) = x_0, u(t) \in U, t \in T, g(x(t_1)) \leq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$ ,  $t \in T$ , — другое допустимое управление и соответствующая ему траектория, удовлетворяющая ограничениям задачи (29). Из (21), (27) имеем:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial B(x(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial B'(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t), \\ - \frac{\partial B(\tilde{x}(t), t)}{\partial t} &\leq \frac{\partial B'(\tilde{x}(t), t)}{\partial x} f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t). \end{aligned}$$

Эти соотношения в терминах полных производных по времени принимают вид

$$\left. \frac{dB(x, t)}{dt} \right|_{u(t)} = 0, \quad \left. \frac{dB(x, t)}{dt} \right|_{\tilde{u}(t)} \geq 0. \quad (30)$$

Проинтегрируем (30) вдоль  $u(t)$ ,  $\tilde{u}(t)$  и используем граничное условие (26):

$$\begin{aligned} B(x(t_1), t_1) - B(x(t_0), t_0) &= \varphi(x(t_1)) + \lambda' g(x(t_1)) - \\ &- B(x_0, t_0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\tilde{x}(t_1), t_1) - B(\tilde{x}(t_0), t_0) &= \varphi(\tilde{x}(t_1)) + \lambda' g(\tilde{x}(t_1)) - \\ &- B(x_0, t_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (28) получаем

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \leq \varphi(\tilde{x}(t_1)) + \lambda' g(\tilde{x}(t_1)) \leq \varphi(\tilde{x}(t_1)) = I(\tilde{u}),$$

т. е.  $u(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное управление. Теорема доказана.

### § 3. Условия трансверсальности

Принцип максимума содержит необходимые условия оптимальности для управлений. Условия оптимальности для краевых значений допустимых траекторий называются *условиями трансверсальности*. В данном параграфе излагается метод вывода необходимых условий оптимальности и условий трансверсальности для задач опти-



мального управления, содержащих ограничения типа равенства и неравенства на правый конец траектории.

**1. Общая задача терминального управления.** Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (1)$$

Как и в основной задаче оптимального управления (§ 1), в качестве доступных управлений будем рассматривать  $r$ -мерные кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ ,  $t \in T$ , удовлетворяющие ограничению

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2)$$

где  $U$  — заданное множество из  $R_r$ .

Пусть  $\varphi_i(x)$ ,  $i = \overline{0, q}$ , — вещественные функции, определенные на  $R_n$ .

Доступное управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , и соответствующую ему траекторию  $x(t)$ ,  $t \in T$ , системы (1) будем называть допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям типа неравенства

$$I_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

и ограничениям типа равенства

$$I_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{p+1, q}. \quad (4)$$

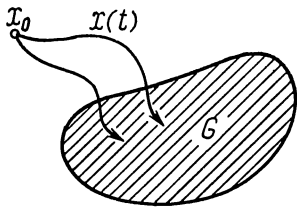


Рис. VII.7

Пусть в  $R_n$  задано множество  $G = \{x \in R_n : \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, p}; \varphi_i(x) = 0, i = \overline{p+1, q}\}$ . Согласно данному выше определению допустимые управления — это функции  $u(t)$ ,  $t \in T$ , со значениями из заданного множества  $U$   $r$ -мерного пространства, для которых траектории  $x(t)$ ,  $t \in T$ , системы (1) в момент  $t = t_1$  попадают на множество  $G$  (рис. VII.7).

Качество допустимых управлений оценим функционалом

$$I_0(u) = \varphi_0(x(t_1)). \quad (5)$$

Задача минимизации функционала (5) на множестве допустимых управлений системы (1) — (4) называется

общей задачей терминального управления (с разделенными краевыми условиями).

Сформулированная задача оптимального управления является достаточно общей; к ней сводятся многие другие задачи. Пусть, например, вместо (5) качество процесса оценивается функционалом

$$I(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Введем дополнительную переменную  $x_0(t) = \int_{t_0}^t f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$ , которая, как очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u, t), \quad x_0(t_0) = 0. \quad (7)$$

С помощью новой переменной критерий качества (6) можно записать в виде

$$I(u) = \varphi_0(x(t_1)) + x_0(t_1). \quad (8)$$

Таким образом, если к системе (1) добавить уравнение (7), то задача с критерием (6) сводится к задаче терминального управления с критерием (8).

## 2. Вариации управлений, траекторий и функционалов.

Для вывода необходимых условий оптимальности в общей задаче терминального управления используем вариации управления игольчатого типа.

Пусть  $\theta \in ]t_0, t_1[$ ,  $v \in U$  и пусть  $\rho(\varepsilon)$  — вещественная неотрицательная функция скалярного аргумента, определенная в некоторой правосторонней окрестности нуля и такая, что  $\rho(0) = 0$ .

Игольчатой вариацией доступного управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , назовем функцию вида

$$\delta u(t; \theta, v, \rho(\varepsilon)) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \rho(\varepsilon)[, \\ 0, & t \in ]\theta + \rho(\varepsilon), t_1]. \end{cases} \quad (9)$$

На множестве игольчатых вариаций доступного управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , введем операцию сложения.

Суммой двух игольчатых вариаций  $\delta u(t; \theta_1, v_1, \rho_1(\varepsilon))$  и  $\delta u(t; \theta_2, v_2, \rho_2(\varepsilon))$  назовем функцию следующего вида:

1) если  $\theta_1 \neq \theta_2$ , то (рис. VII.8)

$$\begin{aligned} \delta u(t; \theta_1, v_1, \rho_1(\varepsilon)) + \delta u(t; \theta_2, v_2, \rho_2(\varepsilon)) = \\ = \begin{cases} v_1 - u^0(t), & t \in [\theta_1, \theta_1 + \rho_1(\varepsilon)], \\ v_2 - u^0(t), & t \in [\theta_2, \theta_2 + \rho_2(\varepsilon)], \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \end{aligned}$$

2) если  $\theta_1 = \theta_2$ , то (рис. VII. 9)

$$\begin{aligned} \delta u(t; \theta_1, v_1, \rho_1(\varepsilon)) + \delta u(t; \theta_2, v_2, \rho_2(\varepsilon)) = \\ = \begin{cases} v_1 - u^0(t), & t \in [\theta_1, \theta_1 + \rho_1(\varepsilon)], \\ v_2 - u^0(t), & t \in [\theta_1 + \rho_1(\varepsilon), \theta_1 + \rho_1(\varepsilon) + \rho_2(\varepsilon)], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

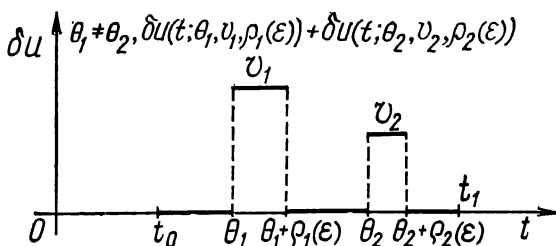


Рис. VII.8

Как видно из рис. VII.9 и VII.10, в случае  $\theta_1 = \theta_2$  введенная операция сложения некоммутативна. Понятие суммы игольчатых вариаций очевидным образом распространяется на любое конечное число слагаемых.

Отметим, что для корректности введенного понятия суммы при  $\theta_1 \neq \theta_2$  необходимо выполнение условия  $[\theta_1, \theta_1 + \rho_1(\varepsilon)] \cap [\theta_2, \theta_2 + \rho_2(\varepsilon)] = \emptyset$ .

Рассмотрим семейство *возмущенных управлений*

$$u(\varepsilon) : u(t, \varepsilon) = u^0(t) + \sum_{i=1}^{\mu} \delta u(t; \theta_i, v_i, \rho_i(\varepsilon)), \quad t \in T,$$

где  $\mu$  — некоторое натуральное число. Предположим дополнительно, что функции  $\rho_1(\varepsilon), \dots, \rho_\mu(\varepsilon)$  непрерывны справа в точке  $\varepsilon = 0$ . Тогда для достаточно малых  $\varepsilon \geq 0$  возмущенное управление  $u(t, \varepsilon)$ ,  $t \in T$ , является доступным и, следовательно, ему соответствует единственное решение  $x(t, \varepsilon)$ ,  $t \in T$ , системы (1). Из непрерывной зави-

симости решений системы дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(t_1, \varepsilon) = x^0(t_1).$$

Более того, если функции  $\rho_1(\varepsilon), \dots, \rho_\mu(\varepsilon)$  дифференцируемы справа в точке  $\varepsilon=0$ , то существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x(t_1, \varepsilon) - x^0(t_1)}{\varepsilon} \triangleq \delta x(t_1) \quad (10)$$

(символ  $\triangleq$  означает «равно по определению»).

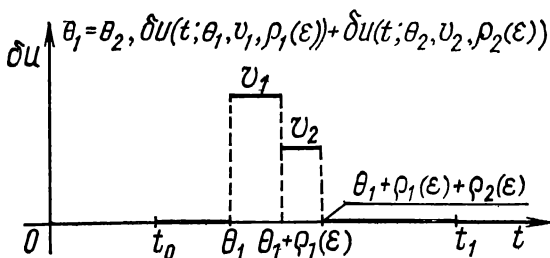


Рис. VII.9

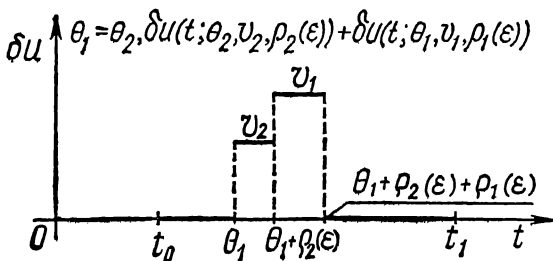


Рис. VII.10

Вектор  $\delta x(t_1)$  называется *первой вариацией траектории*  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , вычисленной в момент  $t=t_1$ .

Вычисляя предел (10), получаем

$$\delta x(t_1) = \sum_{i=1}^{\mu} \dot{\rho}_i(0) F(t_1, \theta_i) \Delta_{v_i} f(x^0(\theta_i), u^0(\theta_i), \theta_i), \quad (11)$$

где  $\Delta_v f(x, u, t) = f(x, v, t) - f(x, u, t)$ ;  $\dot{\rho}_i(0)$  — правосто-

ронная производная функции  $\rho_i(\varepsilon)$  в точке  $\varepsilon=0$ . Матричная функция  $F(t, \tau)$ ,  $t_0 \leq t$ ,  $\tau \leq t_1$ , определяется как решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dF(t, \tau)}{dt} = \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{dx} F(t, \tau), \quad F(\tau, \tau) = E,$$

$E$  — единичная  $n \times n$ -матрица.

Из соотношения (11) видно, что первая вариация траектории  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , соответствующая сумме игольчатых вариаций управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , есть сумма первых вариаций траектории, соответствующих игольчатым вариациям. Отметим, что, несмотря на некоммутативность операции сложения игольчатых вариаций, первая вариация траектории, соответствующая возмущенному управлению (9) (см. (11)), не зависит от порядка слагаемых в сумме игольчатых вариаций.

Рассмотрим множество  $R(t_1)$ , элементы которого есть первые вариации  $\delta x(t_1)$  траектории  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , вычисленные в момент  $t=t_1$  и соответствующие всевозможным семействам возмущенных управлений вида (9). Заметим, что если  $\rho_1(0) = \rho_2(0)$ , то игольчатым вариациям  $\delta u(t; \theta, v, \rho_1(\varepsilon))$  и  $\delta u(t; \theta, v, \rho_2(\varepsilon))$  (точнее, семействам возмущенных управлений  $u_1(t, \varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t; \theta, v, \rho_1(\varepsilon))$ ,  $t \in T$ , и  $u_2(t, \varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t; \theta, v, \rho_2(\varepsilon))$ ) соответствует одна и та же вариация траектории. Следовательно, для того чтобы получить множество  $R(t_1)$ , достаточно рассмотреть в качестве функций  $\rho(\varepsilon)$  линейные функции  $\rho(\varepsilon) = l\varepsilon$ ,  $l \geq 0$ .

Из сказанного выше нетрудно сделать вывод, что  $R(t_1)$  — выпуклый конус \*) в  $R_n$ , причем множество  $Q(t_1)$ , элементы которого суть первые вариации  $\delta x(t_1)$ , соответствующие всевозможным семействам возмущенных управлений вида

$$u(\varepsilon): u(t, \varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t; \theta, v, l\varepsilon), \quad t \in T,$$

является образующим для  $R(t_1)$ , т. е.  $R(t_1) = \text{con} v Q(t_1)$ .

Из определения выпуклой оболочки (гл. II) следует, что любой элемент конуса  $R(t_1)$  может быть получен посредством вариации управления, являющейся суммой  $n$  игольчатых вариаций. Таким образом, приходим к выводу, что

---

\*) См. сноску на стр. 156.

$$R(t_1) = \{\delta x(t_1) : \delta x(t_1) = \sum_{i=1}^n l_i F(t_1, \theta_i) \Delta_{v_i} f(x^0(\theta_i), u^0(\theta_i), \theta_i), \\ \theta_i \in [t_0, t_1], v_i \in U, l_i \geq 0\}. \quad (12)$$

Перейдем теперь к рассмотрению вариаций функционалов. Если функции  $\varphi_i: R_n \rightarrow R_1, i = \overline{0, q}$ , непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x^0(t_1)$ , то  $I_i(u(\varepsilon)), i = \overline{0, q}$ , как функции параметра  $\varepsilon$  имеют в точке  $\varepsilon = 0$  правостороннюю производную, которую будем называть *первой вариацией функционала*  $I_i(u), i = \overline{0, q}$ , вдоль допустимого управления  $u^0(t)$  и обозначать символом  $\delta^1 I_i(u^0)$ . Нетрудно проверить, что

$$\delta^1 I_i(u^0) = - \sum_{j=1}^{\mu} \dot{\rho}_j(0) \Delta_{v_j} H(x^0(\theta_j), \psi^{(i)}(\theta_j), u^0(\theta_j), \theta_j), \quad (13)$$

где  $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$ ; вектор-функции  $\psi^{(i)}(t) = \{\psi_1^{(i)}(t), \dots, \psi_n^{(i)}(t)\}$  определяются как решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \psi(t), \quad (14)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\psi^{(i)}(t_1) = - \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x}. \quad (15)$$

Так как  $\psi^{(i)}(t) = -F'(t_1, t) \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x}, t \in T$  (это проверяется непосредственной подстановкой в (14) и (15)), то из соотношений (11), (13) получаем

$$\delta^1 I_i(u^0) = \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} \delta x(t_1), i = \overline{0, q}. \quad (16)$$

**3. Несовместность линейных неравенств на конусе.** Докажем один вспомогательный результат из теории линейных неравенств, который потребуется при выводе необходимых условий оптимальности.

Пусть  $a_0, a_1, \dots, a_q$  —  $n$ -векторы,  $K$  — выпуклый конус в  $R_n$  с вершиной в нуле.

**Лемма 1.** Если система

$$a'_i x < 0, i = \overline{0, p}; a'_i x = 0, i = \overline{p+1, q}, \quad (17)$$

несовместна на конусе  $K$ , то существует ненулевой вектор  $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q\} \in R_{q+1}$  такой, что

$$\alpha_i \geq 0, i = \overline{0, p}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i a'_i x \geq 0 \text{ для всех } x \in K. \quad (19)$$

**Доказательство.** Несовместность системы (17) на конусе эквивалентна пустоте пересечения выпуклых конусов

$$Z_1 \triangleq \{z \in R_{q+1} : z_i < 0, i = \overline{0, p}; z_i = 0, i = \overline{p+1, q}\},$$

$$Z_2 \triangleq \{z \in R_{q+1} : z_i = a'_i x, x \in K, i = \overline{0, q}\}.$$

Следовательно, по теореме об отделимости выпуклых множеств существует ненулевой вектор  $\alpha \in R_{q+1}$  такой, что  $\alpha' z \leq 0$  для всех  $z \in Z_1$  и  $\alpha' w \geq 0$  для всех  $w \in Z_2$ .

Из первого неравенства следует соотношение (18), а второе неравенство эквивалентно (19). Лемма доказана.

Кроме доказанной леммы далее используется следующее утверждение, называемое *теоремой Брауэра*, которое приведем здесь без доказательства.

**Теорема Брауэра.** Любое непрерывное отображение компактного выпуклого множества из  $R_m$  в себя имеет неподвижную точку.

Частный случай этой теоремы ( $m=1$ ) геометрически очевиден (рис. VII.11): если непрерывная функция  $y = y(x)$  определена на отрезке  $[0, 1]$  и множество ее значений

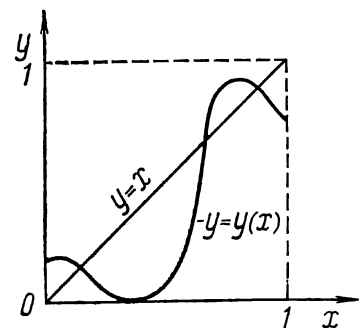


Рис. VII.11

принадлежит  $[0, 1]$ , то она обязательно имеет хотя бы одну общую точку с биссектрисой  $y=x$ .

**4. Принцип максимума и условия трансверсальности.** Пусть  $u^0(t), x^0(t), t \in T$ , — допустимое управление и соот-

ветствующая ему траектория системы (1). Предположим, что функции  $\varphi_i: R_n \rightarrow R_1$ ,  $i = \overline{0, q}$ , из (2) — (4) принадлежат классу  $C^{(1)}$  в окрестности точки  $x^0(t_1)$ .

**Теорема 1.** Если допустимое управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , оптимально в задаче (1) — (4), то существует ненулевой вектор  $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q\} \in R_{q+1}$  такой, что вдоль  $u^0(t)$ ,  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , и траектории  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , сопряженного уравнения (14) выполняются условия:

1) *дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, p}; \lambda_i \varphi_i(x^0(t_1)) = 0, i = \overline{0, p},$$

2) *трансверсальности*

$$\psi^0(t_1) = - \sum_{i=0}^q \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x};$$

3) *максимума*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), t \in T.$$

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $I_0$  индексов, соответствующих активным ограничениям типа неравенства  $I_0 \triangleq \{i \in \{1, 2, \dots, p\} : \varphi_i(x^0(t_1)) = 0\}$ , и пусть  $I = \{0\} \cup I_0$ .

На конусе  $R(t_1)$  первых вариаций траектории  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , рассмотрим систему линейных неравенств

$$\frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} z < 0, i \in I; \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} z = 0, i = \overline{p+1, q}. \quad (20)$$

Возможны два случая.

I. Система (20) несовместна на конусе  $R(t_1)$ . Тогда в силу леммы 1 найдутся числа  $\lambda_i$ ,  $i \in I_1 \triangleq I \cup \{p+1, \dots, q\}$ , не все равные нулю и такие, что  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i \in I$ , и

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} z \geq 0 \text{ для всех } z \in R(t_1). \quad (21)$$

Рассмотрим вектор  $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q\} \in R_{q+1}$ , компоненты которого с индексами из множества  $I_1$  совпадают с полученными выше числами с соответствующими индексами, а остальные равны нулю. Очевидно, что выбранный таким образом вектор  $\lambda$  отличен от нуля и удовлетворяет



условию дополняющей нежесткости. Кроме того, из (21) и (12) следует, что

$$\sum_{i=0}^q \lambda_i \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} F(t_1, \theta) \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \geq 0 \quad (22)$$

для всех  $\theta \in ]t_0, t_1[$  и  $v \in U$ .

Нетрудно проверить, что функция  $\psi^0(t) = - \sum_{i=0}^q \lambda_i F'(t_1,$

$t) \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x}$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет сопряженной системе (14) и условию трансверсальности. Используя функцию  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , условие (22) запишем в виде

$$\psi^{0'}(\theta) \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \geq 0, \theta \in ]t_0, t_1[, v \in U,$$

что эквивалентно условию максимума.

Итак, в случае 1 утверждение теоремы справедливо.

II. Предположим теперь, что существует элемент  $\bar{z} \in R(t_1)$  такой, что

$$\frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} \bar{z} < 0, i \in I; \quad \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} \bar{z} = 0, i = \overline{p+1, q}. \quad (23)$$

Рассмотрим выпуклый конус

$$P(t_1) = \left\{ y = \{y_1, \dots, y_{q-p}\} \in R_{q-p} : y_i = \frac{\partial \varphi_{p+i}'(x^0(t_1))}{\partial x} z, z \in R(t_1), i = \overline{1, q-p} \right\}$$

и покажем, что  $P(t_1) \neq R_{q-p}$ .

Предположим противное:  $P(t_1) = R_{q-p}$ . Тогда в  $P(t_1)$  существует  $(q-p)$ -мерный симплекс  $S$ , натянутый на аффинно-независимые точки  $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(q-p)}$  и содержащий начало координат как внутреннюю точку.

Напомним, что точки  $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(q-p)}$  называются *аффинно-независимыми*, если из соотношений

$$\sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i y^{(i)} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, q-p},$$

следует  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{q-p} = 0$ . Симплекс есть выпуклая оболочка аффинно-независимых точек. Следовательно,

$S = \text{conv}\{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(q-p)}\}$ , причем любой вектор  $y \in S$  однозначно представим в виде

$$y = \sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i(y) y^{(i)}, \text{ где } \lambda_i(y) \geq 0, \sum_{i=0}^{q-p} \lambda_i(y) = 1.$$

Числа  $\lambda_0(y), \lambda_1(y), \dots, \lambda_{q-p}(y)$  называются *барицентрическими координатами* вектора  $y$  в симплексе  $S$ .

Пусть  $z^{(i)}, i = \overline{0, q-p}$ , — векторы из  $R(t_1)$  такие, что

$$y_j^{(i)} = \frac{\partial \varphi_{p+j}'(x^0(t_1))}{\partial x} z^{(i)}, \quad i = \overline{0, q-p}; \quad j = \overline{1, q-p}.$$

Кроме того, будем считать, что  $z^{(i)}, i = \overline{0, q-p}$ , порождены соответственно следующими семействами вариаций управления:

$$\delta u_i(\varepsilon) : \delta u_i(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n \delta u(t; \theta_{ij}, v_{ij}, l_{ij}\varepsilon), \quad t \in T, \quad i = \overline{0, q-p}.$$

Составим семейство вариаций управления следующего вида:

$$\begin{aligned} \delta u(y, \varepsilon) : \delta u(t; y, \varepsilon) = & \sum_{i=0}^q \sum_{j=1}^n \delta u(t; \theta_{ij}, v_{ij}, \lambda_i(y) l_{ij}\varepsilon) + \\ & + \sum_{s=1}^n \delta \bar{u}(t; \bar{\theta}_s, \bar{v}_s, \bar{l}_s \varepsilon), \end{aligned} \quad (24)$$

где вариация управления  $\sum_{s=1}^n \delta \bar{u}(t; \bar{\theta}_s, \bar{v}_s, \bar{l}_s \varepsilon)$  порождает  $\bar{z}$ .

Пусть  $x(t, y, \varepsilon), t \in T$ , — траектория системы (1), соответствующая управлению  $u^0(t) + \delta u(t, y, \varepsilon), t \in T$ .

Рассмотрим семейство отображений  $G(\varepsilon)$  симплекса  $S$  в  $R_{q-p}$ , определенное соотношениями

$$G(\varepsilon) : G_i(y, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varphi_{p+i}(x(t_1, y, \varepsilon)) - \varphi_{p+i}(x^0(t_1))}{\varepsilon} & \text{при } \varepsilon > 0, \\ y_i & \text{при } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Отображение  $G(y, \varepsilon)$  непрерывно на  $S \times [0, \varepsilon^0]$  ( $\varepsilon^0$  — достаточно малое положительное число) по каждой переменной.

Зададим замкнутый шар  $R^v = \{y \in R_{q-p} : \|y\| \leq \gamma\}$ , принадлежащий симплексу  $S$ , и определим функцию

$$N(\varepsilon) = \max_{y \in R^v} \|G(y, 0) - G(y, \varepsilon)\|.$$

Функция  $N(\varepsilon)$  непрерывна в некоторой правосторонней окрестности нуля и  $N(0) = 0$ . В силу непрерывности  $N(\varepsilon)$  существует число  $\bar{\varepsilon} > 0$  такое, что  $N(\varepsilon) \leq \gamma$  для всех  $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ .

Зададим на  $R^v \times [0, \bar{\varepsilon}]$  отображение

$$\Gamma(y, \varepsilon) = G(y, 0) - G(y, \varepsilon).$$

Нетрудно проверить, что при каждом  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  отображение  $\Gamma(y, \varepsilon)$  отображает шар  $R^{N(\varepsilon)} = \{y \in R_{q-p} : \|y\| \leq N(\varepsilon)\}$  в себя. По теореме Брауэра  $\Gamma(y, \varepsilon)$  имеет в  $R^{N(\varepsilon)}$  неподвижную точку при любом  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ , т. е. для любого  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  существует вектор  $y(\varepsilon) \in R^{N(\varepsilon)}$  такой, что  $\Gamma(y(\varepsilon), \varepsilon) = y(\varepsilon)$ . Последнее означает, что для любого  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  существует  $y(\varepsilon)$ , для которого

$$G(y(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \text{ и } \|y(\varepsilon)\| \leq N(\varepsilon). \quad (25)$$

Так как  $N(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , то  $y(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Заметим, что функции  $\rho_{ij}(\varepsilon) = \lambda_i(y(\varepsilon)) l_{ij} \varepsilon$  имеют в нуле правостороннюю производную  $\dot{\rho}_{ij}(0) = \lambda_i(0) l_{ij}$ . Рассмотрим семейство вариаций управления

$$\delta u(\varepsilon) : \delta u(t, \varepsilon) = \delta u(t, y(\varepsilon), \varepsilon), \quad t \in T,$$

где  $\delta u(t, y, \varepsilon)$ ,  $t \in T$ , определяется соотношением (24).

Пусть  $x(t, y(\varepsilon), \varepsilon)$ ,  $t \in T$ , — траектория системы (1), соответствующая доступному управлению  $u(t, \varepsilon) = u^0(t) + \delta u(t, y(\varepsilon), \varepsilon)$ ,  $t \in T$ . Из (25) и определения отображения  $G(y, \varepsilon)$  заключаем, что

$$\varphi_i(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) = \varphi_i(x^0(t_1)) = 0, \quad i = \overline{p+1, q}, \quad (26)$$

при всех  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ .

Кроме того, так как первая вариация функционалов  $I_i(u)$ ,  $i = \overline{0, p}$ , соответствующая  $\delta u(t, y(\varepsilon), \varepsilon)$ ,  $t \in T$ , равна

$$\delta^1 I_i(u^0) = \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} \bar{z}, \quad i = \overline{0, p},$$

то в силу (23) при достаточно малых положительных  $\varepsilon$  имеем

$$\varphi_i(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) < \varphi_i(x^0(t_1)), i \in I. \quad (27)$$

В силу непрерывной зависимости от параметра  $\varepsilon$  при достаточно малых значениях  $\varepsilon$  справедливы неравенства

$$\varphi_i(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) < 0 \text{ для всех } i \in I_1, \quad (28)$$

т. е. для всех  $i$  таких, что  $\varphi_i(x^0(t_1)) < 0$ .

Из соотношений (26) — (28) при достаточно малых положительных  $\varepsilon$  получаем соотношения

$$\varphi_0(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) < \varphi_0(x^0(t_1)); \quad \varphi_i(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) < 0,$$

$$i = \overline{1, p};$$

$$\varphi_i(x(t_1, y(\varepsilon), \varepsilon)) = 0, i = \overline{p+1, q},$$

противоречащие оптимальности управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , в задаче (1) — (4).

Следовательно,  $P(t_1) \neq R_{q-p}$ . Это приводит к существованию ненулевого вектора  $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_{q-p}\} \in R_{q-p}$ , опорного к конусу  $P(t_1)$ , т. е. такого, что  $\mu' y \geq 0$  для всех  $y \in P(t_1)$ . Зададим теперь вектор  $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q\}$  следующим образом:  $\lambda_i = 0$ ,  $i = \overline{0, p}$ ;  $\lambda_i = \mu_{i-p}$ ,  $i = \overline{p+1, q}$ . Очевидно, что вектор  $\lambda$  отличен от нуля, удовлетворяет условию дополняющей нежесткости и, кроме того,

$$\sum_{i=0}^q \lambda_i \frac{\partial \varphi_i'(x^0(t_1))}{\partial x} z \geq 0 \text{ для всех } z \in R(t_1).$$

Рассуждая дальше аналогично случаю 1, завершим доказательство теоремы.

**5. Принцип максимума Понтрягина в задаче быстрого действия.** В задаче (1) — (5) длительность  $t_1 - t_0$  процесса управления предполагалась фиксированной. Если допустить возможность выбора момента  $t_1 \geq t_0$  и определенность элементов задачи при  $t_1 \geq t_0$ , то по аналогии с пп. 2—4 можно доказать, что для оптимального момента времени  $t_1^0$  в дополнение к условиям теоремы 1 (где вместо  $t_1$  следует положить  $t_1^0$ ) будет выполняться условие 4) *стационарности* по  $t_1^0$ :

$$H(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0), t_1^0) = 0.$$

Если вместо (5) взять критерий качества (6),  $\varphi_0 \equiv 0$ ,  $f_0(x, u, t) \equiv 1$ , то при нефиксированном  $t_1$  задача (1) — (5) превратится в задачу быстрогодействия, сформулированную в § 1. Из результатов данного параграфа следует

**Теорема 2 (принцип максимума Понтрягина в задаче быстрогодействия).** Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , — оптимальное управление, переводящее за кратчайшее время  $t_1^0$  траекторию  $x^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , системы  $\dot{x} = f(x, u)$  из состояния  $x(0) = x_n \in R_n$  в состояние  $x(t_1^0) = x_k \in R_n$ . Тогда вдоль  $u^0(t)$ ,  $x^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , существует такое нетривиальное решение  $\psi^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , сопряженной системы  $\dot{\psi} = -\partial H(x, \psi, u)/\partial x$ ,  $H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u)$ , что выполняются условия:

1) *максимума по управлению*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u), \quad t \in [0, t_1^0];$$

2) *стационарности по времени быстрогодействия*  $t_1^0$

$$H(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0)) \geq 0.$$

## § 4. Применения принципа максимума

Принцип максимума, доказанный первоначально для оптимальных процессов в обыкновенных системах, явился основой для получения аналогичных результатов в более сложных системах (см., например, § 6, 7). Из него могут быть получены многие классические результаты вариационного исчисления. В прикладных работах принцип максимума используется для построения разнообразных численных алгоритмов оптимизации. В данном параграфе приводятся простейшие применения принципа максимума.

**1. Краевая задача принципа максимума.** Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} I(u) = \varphi_0(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \varphi_i(x(t_1)) \leq 0, \quad i = 1, p; \quad \varphi_i(x(t_1)) = 0, \quad i = p+1, q; \quad u(t) \in U, \\ t \in T = [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (1)$$

Составим функцию Гамильтона

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$$

и найдем управление  $u = u(x, \psi, t)$  из условия <sup>\*)</sup>

$$H(x, \psi, u(x, \psi, t), t) = \max H(x, \psi, u, t), u \in U.$$

Задача

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi, t), t)}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = - \frac{\partial H(x, \psi, u(x, \psi, t), t)}{\partial x},$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \psi(t_1) = - \sum_{i=0}^q \lambda_i \partial \varphi_i(x(t_1)) / \partial x, \quad (2)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{0, p}; \quad \sum_{i=0}^q |\lambda_i| > 0,$$

$$\lambda_i \varphi_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, p},$$

называется *краевой задачей принципа максимума*.

Согласно § 2, 3 каждое оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , задачи (1) получается из некоторого решения  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , краевой задачи (2):  $u^0(t) = u(x(t), \psi(t), t)$ ,  $t \in T$ . Поэтому, если существует оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , в задаче (1), а краевая задача (2) имеет единственное решение, то для построения  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , достаточно решить задачу (2).

**2. Получение качественных характеристик оптимального управления.** В прикладных задачах принцип максимума позволяет часто получать такие характеристики оптимального управления, которые достаточны для замены исходной сложной задачи на другую более простую задачу, или путем несложного анализа доказать, что тот или другой класс управлений не может содержать оптимальных управлений. Например, во многих прикладных задачах (в частности, в задачах ракетодинамики) математическая модель системы управления имеет вид

$$\dot{x} = f_{(0)}(x, t) + u f_{(1)}(x, t), \quad |u| \leq 1. \quad (3)$$

Из принципа максимума и структуры гамильтониана  $H(x, \psi, u, t) = \psi' f_{(0)}(x, t) + u \psi' f_{(1)}(x, t)$  следует структура оптимального управления  $u^0(t)$ :

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) > 0, \\ -1, & \text{если } \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) < 0, \\ \in [-1, 1], & \text{если } \psi'(t) f_{(1)}(x(t), t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

<sup>\*)</sup> Функция  $H(x, \psi, t) = H(x, \psi, u(x, \psi, t), t)$  соответствует классическому гамильтониану вариационного исчисления (гл. VI).

При дополнительной информации об объекте (3) часто удается доказать, что управление  $u^0(t)$  имеет конечное число точек переключения (со значения  $+1$  на значение  $-1$  и наоборот), или найти *особое управление* на участке с  $\psi'(t)f_{(1)}(x(t), t) \equiv 0$ . Эти факты наряду с достаточно четким представлением о динамике системы (3) позволяют специалистам предугадать точно или найти достаточно хорошее приближение к оптимальному управлению.

Для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq 1,$$

при выполнении критерия управляемости

$$\text{rank}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n$$

оптимальное управление согласно (4) принимает только значения  $\pm 1$  и имеет конечное число переключений (релейное управление). Поэтому бесконечномерная задача оптимального управления сводится к поиску точек переключения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  и знака управления на первом интервале, что является конечномерной задачей.

Важной характеристикой оптимального управления является поведение вдоль него гамильтониана системы  $H(x, \psi, u, t)$ . Поскольку доступные управления суть кусочно-непрерывные функции  $u(t)$ ,  $t \in T$ , то функция  $H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t)$  вдоль них также, вообще говоря, кусочно-непрерывна. Замечательным является тот факт, что в случае, когда  $U$  — компакт, гамильтониан вдоль оптимального управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$  (равно как и вдоль каждой экстремали Понтрягина  $u(t)$ ,  $t \in T$ ), непрерывен. Более того, если  $\partial f / \partial t \in C$ , то в точках непрерывности управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , существует полная производная по времени  $dH/dt$ , которая равна частной производной  $\partial H / \partial t$ .

В самом деле, для моментов  $t \in T$  и  $t^* = t + \Delta t \in T$  из условия максимума имеем

$$\begin{aligned} H(t) = H(x(t), \psi(t), u(t), t) &\geq H(x(t), \psi(t), u(t^*), t), \\ H(t^*) = H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) &\geq \\ &\geq H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*). \end{aligned}$$

Вычитая первое неравенство из второго, получаем

$$\begin{aligned}
H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t) &\leq \\
&\leq H(t^*) - H(t) \leq H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) - \\
&- H(x(t), \psi(t), u(t^*), t). \quad (5)
\end{aligned}$$

В силу непрерывности функций  $x(t)$ ,  $\psi(t)$  крайнее выражение слева в (5) при  $t^* \rightarrow t$  стремится к нулю. Допустим, что

$$H(x(t^*), \psi(t^*), u(t^*), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t^*), t) \geq \alpha > 0$$

вдоль некоторой последовательности  $t^* = t_k \rightarrow t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В силу компактности множества  $U$  из последовательности  $u(t_k) \in U$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, каковой ради упрощения записи будем считать исходную последовательность  $u(t_k) \rightarrow u^*$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Используя непрерывность функции  $f(x, u, t)$  по переменной  $u$ , из (5) получим противоречие  $0 < \alpha \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [H(x(t_k), \psi(t_k), u(t_k), t_k) - H(x(t), \psi(t), u(t_k), t)] = 0$ . Таким образом, в (5) крайнее правое выражение при  $t^* \rightarrow t$  стремится к нулю, т. е.  $H(t^*) \rightarrow H(t)$  и функция  $H(t)$  непрерывна.

Разделим неравенства (5) на  $\Delta t > 0$ . Положив  $\Delta t \rightarrow 0$ , осуществим операции сначала для левого неравенства (5):

$$\begin{aligned}
&\frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} = \\
&= \frac{H(x(t^*), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*)}{\Delta t} + \\
&+ \frac{H(x(t), \psi(t^*), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t^*)}{\Delta t} + \\
&+ \frac{H(x(t), \psi(t), u(t), t^*) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\Delta t} \leq \\
&\leq \frac{H(t^*) - H(t)}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

В пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned}
\dot{x}'(t) \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial x + \dot{\psi}'(t) \partial H(x(t), \psi(t), \\
u(t), t) / \partial \psi + \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial t \leq dH(t) / dt. \quad (6)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\dot{x} = \partial H / \partial \psi, \quad \dot{\psi} = -\partial H / \partial x,$$



то неравенство (6) упрощается:

$$\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)/\partial t \leq dH(t)/dt. \quad (7)$$

Аналогично для правого неравенства в (5) с учетом непрерывности функции  $u(t)$  в точке  $t$  получим

$$\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)/\partial t \geq dH(t)/dt. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует доказываемое свойство

$$\frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial t}.$$

Понятно, что в случае стационарных систем (1) ( $f(x, u, t) \equiv f(x, u)$ ) частная производная  $\partial H/\partial t$  равна нулю и поэтому гамильтониан системы вдоль экстремали Понтрягина постоянен.

Точная реализация оптимальной системы из-за сложности законов управления иногда сопровождается большими затратами. Это обстоятельство часто приводится как довод для отказа от оптимальных систем. В действительности же оптимальные системы используются как эталоны, позволяющие строить субоптимальные системы, в которых точность приближения к оптимальным системам согласована с затратами на реализацию.

**3. Улучшение допустимых управлений.** При исследовании прикладных задач нередко вместо решения задачи оптимального управления достаточно решить ограниченную задачу замены имеющихся (возможно, уже хороших) управлений более качественными. Эффективные алгоритмы улучшения, позволяющие улучшить показатели системы на 10—15%, представляют большую ценность.

С каждым необходимым условием оптимальности можно связать алгоритм улучшения допустимого управления, которое этому условию не удовлетворяет. В данном пункте излагаются алгоритмы, связанные с принципом максимума и его следствиями.

Пусть  $u(t)$ ,  $t \in T$ , — допустимое управление в простейшей задаче терминального управления (§ 2):

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (9)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1].$$

Обозначим через  $x(t)$ ,  $t \in T$ , траекторию системы (9),

соответствующую управлению  $u(t)$ ,  $t \in T$ . Интегрированием вдоль  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $t \in T$ , справа налево сопряженной системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x(t), \psi, u(t), t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x},$$

найдем функцию  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ . Функцию, доставляющую максимум гамильтониану, обозначим через  $u^*(t)$ :

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg} \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t).$$

Если  $u(t) \equiv u^*(t)$ ,  $t \in T$ , то исходное управление удовлетворяет принципу максимума в задаче (9) и его невозможно улучшить с помощью этого необходимого условия оптимальности.

Пусть  $\Theta$  — такая точка множества  $]t_0, t_1[$ , что  $u(\Theta) \neq u^*(\Theta)$  и функция  $u(t)$  непрерывна в ней. Построим управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in ]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[, \\ u(t), & t \in ]t_0 - \varepsilon, \theta + \varepsilon[, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

которое доступно и представляет исходное управление с включенным на малом участке фрагментом управления  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ .

Анализируя приращение критерия качества (см. § 2), видим, что существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , управление  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$ , лучше управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ :  $I(\bar{u}) < I(u)$ .

Для описания второго способа улучшения допустимого управления в задаче (9) предварительно получим следствие из принципа максимума, которое имеет место в случае, когда в дополнение к сделанным в § 2 предположениям функция  $f(x, u, t)$  дифференцируема по  $u$ , а множество  $U$  выпукло: вдоль каждого оптимального управления  $u^0(t)$  и соответствующих ему решений  $x^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$  исходной и сопряженной систем задачи (9) выполняется условие

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \\ & = \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u, \quad t \in ]t_0, t_1[. \end{aligned} \quad (10)$$

В самом деле, если существуют такие момент  $\Theta \in ]t_0, t_1[$

и элемент  $v \in U$ , что  $\partial H'(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta)/\partial u \times \times u^0(\Theta) = \partial H'(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta)/\partial u \cdot v - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , то при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  получается противоречие с условием максимума:

$$H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta) + \varepsilon(v - u^0(\Theta)), \Theta) - \\ - H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \varepsilon \partial H'(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), \\ u^0(\Theta), \Theta)/\partial u \cdot (v - u^0(\Theta)) + o(\varepsilon) = \varepsilon \alpha + o(\varepsilon) > 0.$$

Проверка условия (10) связана с максимизацией линейной функции. Она проще, чем проверка условия максимума. Необходимое условие оптимальности, основанное на соотношении (10), принято называть *линеаризованным принципом максимума*.

Пусть  $u(t)$ ,  $t \in T$ , — допустимое управление, на котором соотношение (10) не выполняется. Построим допустимое управление

$$\bar{u}(t) = u(t) + \varepsilon(u^*(t) - u(t)), \quad \varepsilon > 0, \quad t \in T, \quad (11)$$

где

$$u^*(t) \in \text{Arg max } u' \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)/\partial u, \quad u \in U.$$

Подставив управление (11) в формулу приращения (10) § 2, нетрудно убедиться, что при  $u^*(t) \neq u(t)$ ,  $t \in T$ , найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , выполняется неравенство  $I(\bar{u}) < I(u)$ , т. е. управление (11) лучше исходного.

Другое следствие принципа максимума для задачи (9) получается, если предположить, что функция  $f(x, u, t)$ , как и в предыдущем следствии, дифференцируема по  $u$ , а множество  $U$  открыто. В этом случае вдоль оптимального управления  $u^0(t)$  выполняется *условие стационарности гамильтониана*:

$$\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)/\partial u = 0, \quad t \in ]t_0, t_1[. \quad (12)$$

Действительно, если  $\partial H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta)/\partial u = = \alpha \neq 0$  при некотором  $\Theta \in ]t_0, t_1[$ , то придем к противоречию с условием максимума:

$$H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta) + \varepsilon \alpha, \Theta) - \\ - H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \varepsilon \alpha' \partial H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), \\ u^0(\Theta), \Theta)/\partial u + o(\varepsilon) = \varepsilon \alpha' \alpha + o(\varepsilon) > 0,$$

если  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число.

Приведенное доказательство условия (12) в совокупности с формулой приращения (10) § 2 позволяет указать управление

$$\bar{u}(t) = u(t) + \varepsilon \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial u, t \in T, \varepsilon > 0,$$

которое при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  лучше управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ :  $I(\bar{u}) < I(u)$ .

Поскольку из формулы приращения (10) § 2 следует формула

$$\Delta I(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial u dt + o(\|\Delta u(\cdot)\|),$$

то по аналогии с формулой  $\Delta f(x) = -\Delta x' \text{grad } f(x) + o(\|\Delta x\|)$  выражение

$$\frac{\delta I}{\delta u(t)} = \text{grad } I(u) = - \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u}$$

называют *вариационной производной (градиентом) функционала*  $I(u)$  на управлении  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

В некоторых задачах оптимального управления ограничения на управление накладываются не в каждый момент  $t \in T$ , а в целом на всю функцию  $\{u(t), t \in T\}$ . Рассмотрим, для примера, одно ограничение такого типа:

$$\int_{t_0}^{t_1} u'(t) R(t) u(t) dt \leq L \quad (R(t) > 0, t \in T), \quad (13)$$

считая функции  $u(t) \in R_r$  суммируемыми с квадратом на  $T$ .

Предлагается в качестве упражнения, исходя из формулы приращения (10) § 2, доказать, что оптимальное управление в задаче (9), в которой заменен класс доступных управлений на (13), удовлетворяет (*интегральному*) *условию максимума*

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} u^{0'}(t) \partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) / \partial u dt = \\ & = \max_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} u'(t) \partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) / \partial u dt, \end{aligned} \quad (14)$$

где максимум справа берется по всем функциям  $u(t)$ ,  $t \in T$ , стесненным ограничением (13).

Управление, которое улучшает управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , не удовлетворяющее условию (14), строится по формуле (11), где  $u^*(t)$  имеет вид

$$u^*(t) \in \operatorname{Arg} \max_{(13)} \int_{t_0}^{t_1} u'(t) \partial H(x(t), \psi(t), u(t), t) / \partial u dt.$$

В заключение рассмотрим важный в приложениях класс задач оптимизации динамических систем по параметрам:

$$\begin{aligned} I(\omega) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \dot{x} = f(x, \omega, t), x(t_0) = \\ = x_0, t \in T, \omega \in W. \end{aligned} \quad (15)$$

В задаче (15), в отличие от задачи (9), вектор  $\omega$  — параметр управления, который выбирается в начальный момент  $t = t_0$  и не изменяется в течение процесса. Часто роль таких параметров играют конструкционные параметры. Другой источник задач (15) состоит в широко распространенном подходе, когда оптимальные управления в задаче (9) по ряду причин ищутся в заданном классе функций  $u(t) = u(t, \omega)$ , зависящем от конечного числа параметров (аналог известного метода Ритца). Повторив вычисления, связанные с доказательством принципа максимума, для задачи (15) получим следующие результаты. Если  $W$  — выпуклое множество,  $\varphi(x)$ ,  $\partial \varphi(x) / \partial x$ ,  $f(x, \omega, t)$ ,  $\partial f(x, \omega, t) / \partial x$ ,  $\partial f(x, \omega, t) / \partial \omega \in C$ ,  $\omega^0 \in W$ , — решение задачи (15), то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \omega^{0'} \partial H(x^0(t), \psi^0(t), \omega^0, t) / \partial \omega dt = \\ = \max_{\omega \in W} \int_{t_0}^{t_1} \omega' \partial H(x^0(t), \psi^0(t), \omega^0, t) / \partial \omega dt, \\ \frac{\partial I(\omega)}{\partial \omega} = \operatorname{grad} I(\omega) = - \int_{t_0}^{t_1} \partial H(x(t), \psi(t), \omega, t) / \partial \omega dt, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решения исходной и сопряженной систем:

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x, \omega, t), x(t_0) = x_0, \dot{\psi} = -\partial H(x(t), \psi, \omega, t) / \partial x, \\ \psi(t_1) = -\partial \varphi(x(t_1)) / \partial x, H(x, \psi, \omega, t) = \psi' f(x, \omega, t), \end{aligned}$$

соответствующие параметру  $\omega \in W$ .

Формула (16) позволяет для решения задачи (15) использовать разнообразные градиентные методы, изложенные в гл. IV.

**4. Получение основных результатов вариационного исчисления.** Основная задача вариационного исчисления

$$\int_a^b F(x, y, y_x) dx \rightarrow \min, y(a) = c, y(b) = d, \quad (17)$$

в обозначениях теории оптимального управления

$$x \rightarrow t, y(x) \rightarrow x(t), y_x(x) \rightarrow \dot{x}(t) = u, a \rightarrow t_0, b \rightarrow t_1,$$

принимает следующий вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt \rightarrow \min, \dot{x} = u, x(t_0) = c, x(t_1) = d. \quad (18)$$

Если, следуя § 3, ввести дополнительную переменную  $x_0(t) = \int_{t_0}^t F(\tau, x, u) d\tau$ , то из (18) получим задачу терминального управления

$$I(u) = x_0(t_1) \rightarrow \min, \dot{x} = u, \dot{x}_0 = F(t, x, u), x(t_0) = c, x_0(t_0) = 0; x(t_1) = d, \quad (19)$$

без ограничений на значения допустимых управлений ( $U=R$ ).

Запишем гамильтониан и сопряженную систему для задачи (19):

$$H(x, \psi, u, t) = \psi u + \psi_0 F(t, x, u),$$

$$\dot{\psi} = -\psi_0 \frac{\partial F(t, x, u)}{\partial x}, \dot{\psi}_0 = 0,$$

т. е.

$$\psi_0(t) \equiv \text{const} \leq 0, \psi(t) = c - \psi_0 \int_{t_0}^t \frac{\partial F(\tau, x, u)}{\partial x} d\tau. \quad (20)$$

Из условия максимума

$$\begin{aligned} \psi^0(t) u^0(t) + \psi_0^0 F(t, x^0(t), u^0(t)) = \\ = \max [\psi^0(t) u + \psi_0^0 F(t, x^0(t), u)], u \in R, \end{aligned}$$

следует

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} = \psi^0(t) + \psi_0^0 \frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0, \quad (21)$$

что в совокупности с (20) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \psi_0^0 \left[ - \frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t \frac{\partial F(\tau, x, u^0)}{\partial x} d\tau \right] = \text{const}. \end{aligned} \quad (22)$$

Постоянная  $\psi_0^0$  отлична от нуля, ибо из  $\psi_0^0 = 0$  в силу (21) следует тождество  $\psi^0(t) \equiv 0$ , противоречащее нетривиальности принципа максимума. Разделив равенство (22) на  $\psi_0^0 \neq 0$ , получим уравнение

$$\frac{\partial F(t, x^0, u^0)}{\partial u} - \int_{t_0}^t \frac{\partial F(\tau, x^0, u^0)}{\partial x} d\tau = \text{const},$$

которое, как нетрудно видеть, в исходных обозначениях задачи (17) совпадает с интегральным уравнением Эйлера.

Условия Вейерштрасса — Эрдмана (гл. VI) сводятся к непрерывности решения  $\psi^0(t)$  сопряженной системы и непрерывности вдоль  $u^0(t)$ ,  $x^0(t)$ ,  $\psi^0(t)$  функции Гамильтона, доказанной в п. 2.

Из условия максимума гамильтониана кроме равенства  $\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)/\partial u = 0$ , ведущего к уравнению Эйлера, следует неравенство  $\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)/\partial u^2 \geq 0$ , эквивалентное условию Лежандра — Клебша

$$\partial^2 F(x, y^0, y_x^0)/\partial y_x^2 \leq 0.$$

Функция

$$\begin{aligned} E(x, y, y_x, z) &= F(x, y, z) - F(x, y, y_x) - \\ &- (z - y_x) \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} \end{aligned}$$

называется *функцией Вейерштрасса* для задачи (17). Для нее в терминах задачи (19) с использованием (21), обозначения гамильтониана, принципа максимума и неравенства  $\psi_0 < 0$  имеем

$$\begin{aligned}
E(t, x^0(t), u^0(t), v) &= F(t, x^0(t), v) - F(t, x^0(t), u^0(t)) - \\
&- (v - u^0(t)) \frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = \frac{1}{\psi_0} (\Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), \\
&u^0(t), t) - \psi^0(v - u^0(t)) + (v - u^0(t)) \frac{1}{\psi^0} \psi^0(t) = \\
&= \frac{1}{\psi_0} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Доказанное неравенство

$$E(x, y^0(x), y_x^0(x), z) \geq 0 \quad \forall z \in R,$$

известно в вариационном исчислении как необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума.

## § 5. Оптимизация линейных систем

В теории оптимального управления получены законченные результаты при оптимизации линейных систем. В данном параграфе описываются приложения трех известных методов.

**1. Задача линейного быстродействия.** Рассмотрим задачу быстродействия (§ 1) в случае линейной системы и специального ограничения на управление:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + bu, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1], \quad x(0) = \\
&= x_0, \quad x(t_1) = 0, \quad t_1 \rightarrow \min.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x$  —  $n$ -вектор состояния линейной системы;  $u$  — скаляр-управление;  $A$  —  $n \times n$ -матрица, характеризующая динамические свойства объекта управления;  $b$  —  $n$ -вектор, который характеризует действие управления на объект.

Будем считать, что система (1) управляема, т. е.

$$\text{rank}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n. \tag{2}$$

В теории управляемости показывается, что в этом случае найдется окрестность начала координат, для точек которой существуют допустимые траектории задачи (1). Тогда согласно теореме существования оптимальных управлений (§ 1) в задаче (1) с  $x_0$  из указанной окрестности найдутся и оптимальные управления.

Составим функцию Гамильтона задачи (1)

$$H(x, \psi, u) = \psi'(Ax + bu) \tag{3}$$



и запишем уравнение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'\psi. \quad (4)$$

При выполнении условия (2) функция  $\psi'(t)b$ ,  $t \geq 0$ , составленная из любого ненулевого решения сопряженной системы, не имеет точек сгущения на конечном отрезке и обращается в нуль не более чем в  $n-1$  момент, если собственные значения матрицы  $A$  вещественны (докажите!).

Максимум функции (3) по переменной управления  $u$  в случае ограничения  $|u| \leq 1$  достигается при

$$u^0 = \text{sign } \psi^0 b.$$

Следовательно, оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \geq 0$ , в задаче (1) может быть только релейным:

$$u^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi^{0'}(t)b > 0, \\ -1, & \text{если } \psi^{0'}(t)b < 0, \end{cases}$$

т. е. в каждый момент времени принимает одно из предельных значений и имеет конечное число точек переключения.

**Теорема 1.** Если доступное управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , в линейной задаче быстрогодействия (1) удовлетворяет принципу максимума и соответствующая ему траектория  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , в момент  $t = t_1^*$  попадает в начало координат, то  $t_1^*$  — время оптимального быстрогодействия,  $u^*(t)$ ,  $x^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , — оптимальные управление и траектория.

**Доказательство.** Для произвольных функций  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \geq 0$ , удовлетворяющих уравнениям (1), (4), в точках непрерывности функции  $u(t)$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi'(t)x(t) &= \dot{\psi}'(t)x(t) + \psi'(t)\dot{x}(t) = \\ &= -\psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)bu(t) = \psi'(t)bu(t). \end{aligned}$$

Интегрируя его в пределах от  $\sigma$  до  $\tau$ , получаем

$$\psi'(\tau)x(\tau) - \psi'(\sigma)x(\sigma) = \int_{\sigma}^{\tau} \psi'(t)bu(t)dt. \quad (5)$$

Предположим, что управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , не

является оптимальным, т. е. существует другое допустимое управление  $u^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^0]$ , которое переводит траекторию  $x^0(t)$  системы (1) из  $x_0 = x^0(0)$  в  $x = 0$  за время  $t_1^0 < t_1^*$ . Обозначим через  $\psi_*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , решение сопряженной системы (4), соответствующее согласно принципу максимума управлению  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ . Тогда из (5) следует

$$\begin{aligned} \psi'_*(t_1^0) x^*(t_1^0) &= [\psi'_*(t_1^0) x^*(t_1^0) - \psi'_*(0) x^*(0)] - \\ &- [\psi'_*(t_1^0) x^0(t_1^0) - \psi'_*(0) x^0(0)] = \\ &= \int_0^{t_1^0} [\psi'_*(t) bu^*(t) - \psi'_*(t) bu^0(t)] dt. \end{aligned} \quad (6)$$

По условию теоремы 1 управление  $u^*(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ , удовлетворяет принципу максимума, т. е.  $\psi'_*(t) bu^*(t) \geq \psi'_*(t) bu^0(t)$ ,  $t \in [0, t_1^*] \supset [0, t_1^0]$ . Поэтому из (6) следует неравенство  $\psi'_*(t_1^0) x^*(t_1^0) \geq 0$ .

С другой стороны, учитывая, что  $u^*(t) = \text{sign } \psi'_*(t) b$ ,  $\psi'_*(t) b \neq 0$ ,  $t \in [0, t_1^*]$ ,  $t_1^0 < t_1^*$ , из (5) получаем

$$\begin{aligned} \psi'_*(t_1^0) x^*(t_1^0) &= \psi'_*(t_1^0) x^*(t_1^0) - \psi'_*(t_1^*) x^*(t_1^*) = \\ &= - \int_{t_1^0}^{t_1^*} \psi'_*(t) bu^*(t) dt = - \int_{t_1^0}^{t_1^*} |\psi'_*(t) b| dt < 0. \end{aligned}$$

Противоречие доказывает теорему.

Теорема позволяет осуществить *синтез оптимальной системы* (1), т. е. построить оптимальное *управление типа обратной связи*:

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in S_+, \\ -1, & \text{если } x \in S_-, \end{cases} \quad S_+ \cup S_- = R_n. \quad (7)$$

Просто эта задача решается для двумерных систем (1), когда  $n=2$ . Для иллюстрации метода синтеза рассмотрим задачу (4) из § 1 с  $\beta=0$ ,  $v_1=0$ , которая является частным случаем задачи (1) при

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad x_0 = \begin{Bmatrix} \alpha \\ v_0 \end{Bmatrix}.$$

Поскольку векторы

$$b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad Ab = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

линейно независимы, то рассматриваемая система управляема.

Сопряженная система (4) имеет вид  $\dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = -\psi_1$ . Составим функцию Гамильтона  $H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$ .

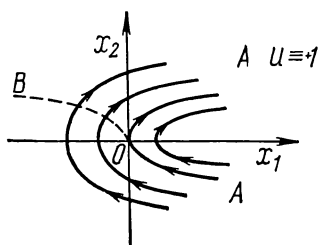


Рис. VII.12

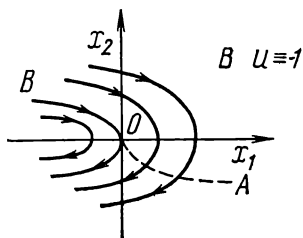


Рис. VII.13

Отсюда получаем форму оптимального управления  $u^0(t) = \text{sign } \psi_2(t)$ , т. е.  $|u^0(t)| \equiv 1$ .

Собственные значения матрицы  $A$  (корни полинома  $\det(A - \mu E) = \det \begin{Bmatrix} -\mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{Bmatrix} = \mu^2$ ) вещественны ( $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ). Следовательно, функция  $\psi'(t) b = \psi_2(t)$  на множестве  $t \geq 0$  может иметь не более одного нуля. Значит, оптимальное управление  $u^0(t)$  содержит не более двух интервалов постоянства (другими словами, не более одной точки переключения).

Этих сведений достаточно для синтеза управления (7). Оптимальная траектория  $x^0(t)$  состоит не более чем из двух кусков, составленных из траекторий систем

$$\begin{array}{ll} A & \dot{x}_1 = x_2, \\ & \dot{x}_2 = 1; \quad B \quad \dot{x}_1 = x_2, \\ & \dot{x}_2 = -1. \end{array}$$

Фазовые портреты этих систем изображены на рис. VII.12, VII.13 и состоят из семейств кривых  $x_1 = x_2^2/2 + c(A)$ ,  $x_1 = -x_2^2/2 + c(B)$ .

Направление движения фазовой точки вдоль кривых находим из условия  $\dot{x}_2=1(A)$ ,  $\dot{x}_2=-1(B)$ . Траектории  $AO$  (рис. VII.12) и  $BO$  (рис. VII.13) ведут в начало координат. Согласно теореме 1 они оптимальны. Нетрудно заметить (рис. VII.14), что из любой точки  $x=\{x_1, x_2\}$ , лежащей ниже линии  $AOB$ , по траектории системы  $A$  можно попасть на траекторию  $BO$ , а по ней в точку  $x=0$ . Поскольку при этом использовались на первом участке управление  $u \equiv 1$ , а на втором  $u \equiv -1$ , то согласно тео-

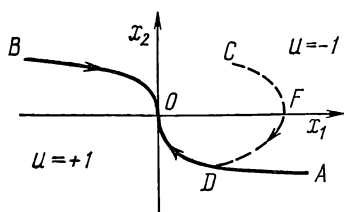


Рис. VII.14

реме 1 полученные траектории оптимальны. Аналогично оптимальное управление для точек, лежащих выше линии  $AOB$ , состоит из участка  $u \equiv -1$  (до попадания траектории на кривую  $AO$ ) и участка  $u \equiv 1$  (при движении вдоль траектории  $AO$ ). Таким образом,

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in AO \text{ или лежит ниже кривой } AOB, \\ -1, & \text{если } x \in BO \text{ или лежит выше кривой } AOB. \end{cases} \quad (8)$$

Кривая  $AOB$  (рис. VII.14) называется линией переключения.

Пусть начальное состояние системы (4) § 1 имеет вид  $x_1=x_0>0$ ,  $x_2=\dot{x}_0>0$ . Ей соответствует точка  $C$  на рис. VII.14. Поскольку точка  $C$  лежит выше кривой переключения, то оптимальное управление на начальном участке (кривая  $CD$ ) принимает значение  $u=-1$ , т. е. к объекту прилагается максимальное усилие, направленное к началу координат. Объект на участке  $CF$  движется вправо, замедляя движение, а затем, увеличивая скорость, движется влево (участок  $FD$ ). Начиная с точки  $D$ , направление максимального усилия меняется на противоположное. При этом объект продолжает двигаться с уменьшающейся скоростью влево. Как только происходит попадание в начало координат, управление выключается и объект оставляется в покое.

Знание закона (8) позволяет построить оптимальную систему, работающую в автоматическом режиме.

**2. Задача минимизации нормы конечного состояния.** Рассмотрим задачу оптимального управления

$$I(u) = \|x(t_1) - x^*\|^2 \rightarrow \min, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = 0, \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_1], \quad (9)$$

состоящую в минимизации расстояния до заданного вектора  $x^*$  от конечных состояний управляемой линейной системы.

Принцип максимума для задачи (9) имеет следующий вид:

$$u^0(t) = \text{sign } \psi'(t)b, \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$  — решение сопряженной системы (4) с краевым условием  $\psi(t_1) = -2(x(t_1) - x^*)$ .

Из выпуклости функции  $\varphi(x) = \|x - x^*\|^2$  следует, что в остаточном члене  $\eta$  формулы приращения (10) § 2 слагаемое  $\eta_1$  неотрицательно. Слагаемые  $\eta_2, \eta_3$  в силу линейности системы (9) по  $x$  и разделенности переменных  $x, u$  равны нулю. Поэтому вдоль управления  $u(t), t \in T$ , удовлетворяющего принципу максимума, приращение критерия качества неотрицательно для любого допустимого управления  $u^*(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$ . Это означает, что в задаче (9) принцип максимума — достаточное условие оптимальности.

Однако для рассматриваемого частного случая задачи терминального управления решение краевой задачи принципа максимума

$$\dot{x} = Ax + b \text{ sign } \psi' b, \quad x(0) = 0, \quad \dot{\psi} = -A' \psi, \\ \psi(t_1) = -2(x(t_1) - x^*),$$

представляет серьезные трудности. Цель настоящего пункта — описать другой метод решения задачи (9), основанный на фактах выпуклого анализа и позволяющий свести (редуцировать) задачу (9) к задаче выпуклого программирования.

Множество

$$Q = Q(t_1) = \{x: x = x(t_1, u(\cdot)), |u(t)| \leq 1, t \in [0, t_1]\}$$

состояний системы (9), в которых она может оказаться в момент  $t = t_1$  под действием доступных управлений

$u(\cdot) = \{u(t), t \in [0, t_1]\}$ , называется *множеством достижимости*. В терминах этого множества рассматриваемая задача состоит в поиске точки  $x^0(t_1) \in Q$ , наименее удаленной от вектора  $x^*$  (рис. VII.15).

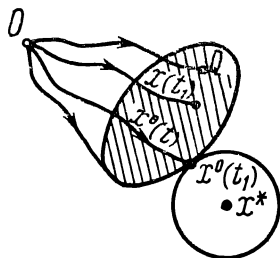


Рис. VII.15

С помощью метода вариации произвольных постоянных в теории дифференциальных уравнений доказывается формула Коши представления решений линейного неоднородного дифференциального уравнения (9):

$$x(t) = \int_0^t \exp A(t-\tau) b u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \quad (10)$$

В справедливости формулы (10) легко убедиться непосредственной подстановкой ее в (9).

Пусть  $x^1 = x(t_1, u^1(\cdot))$ ,  $x^2 = x(t_1, u^2(\cdot))$  — два произвольных элемента множества достижимости. В силу линейности системы (9) траектория  $x^\lambda(t) = x(t, u^\lambda(\cdot))$ , соответствующая управлению  $u^\lambda(t) = \lambda u^1(t) + (1-\lambda) u^2(t)$ , удовлетворяет равенству  $x^\lambda(t) = \lambda x^1(t) + (1-\lambda) x^2(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Поскольку при любых  $\lambda \in [0, 1]$  функция  $u^\lambda(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , кусочно-непрерывна и  $|u^\lambda(t)| \leq \lambda |u^1(t)| + (1-\lambda) |u^2(t)| \leq 1$ , то  $x^\lambda(t_1) \in Q$ , т. е.  $Q$  — выпуклое множество. Нетрудно показать, что оно ограничено и замкнуто.

Известно, что каждая норма  $\|x\|$  имеет представление

$$\|x\| = \max_{\|g\| \leq 1} g'x, \quad (11)$$

где  $\|g\|$  — норма элемента  $g$  из пространства  $R'_n$ , сопряженного к  $R_n$ .

Используя (11), запишем

$$I(u^0) = \|x^0(t_1) - x^*\| = \min_{x \in Q} \|x - x^*\| = \min_{x \in Q} \max_{\|g\| \leq 1} g'(x - x^*). \quad (12)$$

Воспользуемся теоремой о минимаксе (см. гл. II) и представлением (10):

$$I(u^0) = \min_{x \in Q} \max_{\|g\| \leq 1} g'(x - x^*) = \max_{\|g\| \leq 1} \min_{x \in Q} g'(x - x^*) =$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\|g\| \leq 1} \min_{|u(t)| \leq 1} \left\{ -g' x^* + \int_0^{t_1} g' \exp A(t_1 - t) b u(t) dt \right\} = \\
&= \max_{\|g\| \leq 1} \left\{ -g' x^* - \int_0^{t_1} |g' \exp A(t_1 - t) b| dt \right\} = \\
&= -g'_0 x^* - \int_0^{t_1} |g'_0 \exp A(t_1 - t) b| dt.
\end{aligned}$$

Последние два равенства достигаются на управлении

$$u^0(t) = -\operatorname{sign} g'_0 \exp A(t_1 - t) b, \quad t \in [0, t_1], \quad (13)$$

которое является, следовательно, оптимальным.

Задача (9) свелась к поиску вектора  $g_0$ , доставляющего решение задаче

$$\lambda(g) = -g' x^* - \int_0^{t_1} |g' \exp A(t_1 - t) b| dt \rightarrow \min, \quad \|g\| \leq 1. \quad (14)$$

Функция  $\lambda(g)$  — выпуклая, и ее градиент в точке  $g$ ,  $\lambda(g) \neq 0$ , равен

$$\operatorname{grad} \lambda(g) = -x^* - \int_0^{t_1} \exp A(t_1 - t) b u(t, g) dt, \quad (15)$$

где  $u(t, g) = \operatorname{sign} g' \exp A(t_1 - t) b$ ,  $t \in [0, t_1]$ .

Из (14), (15) очевиден геометрический смысл градиента (рис. VII.16). Формула (15) позволяет организовать эффективные методы решения задачи выпуклого программирования (9) (гл. IV).

С задачей (9) тесно связана задача быстрогодействия с подвижным правым концом:  $\dot{x} = Ax + bu$ ,  $|u(t)| \leq 1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\|x(t_1) - x^*\| \leq \delta$ ,  $t_1 \rightarrow \min$ . Действительно, время быстрогодействия  $t_1^0$  равно минимальному  $t_1$ , при котором критерий качества задачи (9) удовлетворяет неравенству  $I(u) \leq \delta$ . Из (14) заключаем, что

$$\begin{aligned}
t_1^0 = \min_{\|g\|=1} \left\{ t(g) : -g' x^* - \right. \\
\left. - \int_0^{t(g)} |g' \exp A(t(g) - t) b| dt = \delta \right\} = t(g_0). \quad (16)
\end{aligned}$$

При этом если

$$-g'_0 x^* - \int_0^{t_1^0} |g'_0 \exp A(t_1^0 - t) b| dt = \delta,$$

то оптимальное управление имеет вид (13).

Обозначив  $\psi'(t) = -g'_0 \exp A(t_1^0 - t) b$ , получим, что  $\psi(t)$  — решение сопряженной системы (4) с начальным условием

$$\psi(t_1^0) = -g_0.$$

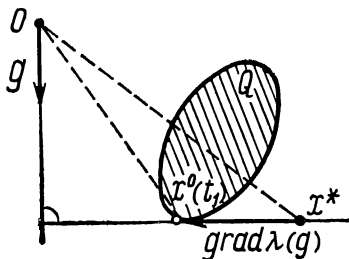


Рис. VII.16

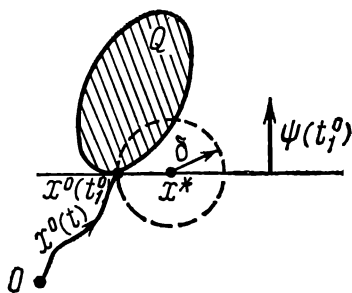


Рис. VII.17

Равенство (13) эквивалентно принципу максимума. Поскольку  $g'_0(x^0(t_1^0) - x^*) \leq g'_0(x - x^*)$  для всех  $\|x - x^*\| \leq \delta$ , то для вектора  $\psi(t_1^0)$  выполняется условие

$$\psi^{0'}(t_1^0)(x^0(t_1^0) - x^*) = \min_{\|x - x^*\| \leq \delta} \psi^{0'}(t_1^0)(x - x^*),$$

которое называется условием трансверсальности (§ 3).

На геометрическом языке это условие на правом конце траектории означает: оптимальная траектория  $x^0(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1^0$ , оканчивается в той точке  $x^0(t_1^0)$ , где плоскость, опорная к множеству  $\|x - x^*\| \leq \delta$ , перпендикулярна к вектору  $\psi^0(t_1^0)$  (вектор  $\psi^0(t_1^0)$  направлен в сторону упомянутого множества) (рис. VII. 17).

Из неравенства  $g'_0(x - x^*) \geq g'_0(x^0(t_1^0) - x^*)$ , справедливого для всех  $x \in Q$ , следует условие стационарности для времени оптимального быстрогодействия  $t_1^0$  (см. § 3).

Изложенный метод позволяет, таким образом, не



только доказать принцип максимума, но и указать начальное условие для сопряженной системы.

Для иллюстрации метода решим задачу наискорейшего перевода объекта (§ 1) из состояния покоя ( $x=0$ ) в точку  $\{x_1=\alpha>0, x_2=0\}$ . Согласно изложенному время быстрогодействия равно (16) с  $\delta=0$ . Поскольку

$$\exp At = \begin{Bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

то из (16) получаем

$$t_1^0 = \min \left\{ t_1 : -g_1 \alpha + \int_0^{t_1} |g_1(t_1 - t) + g_2| dt = 0 \right\}.$$

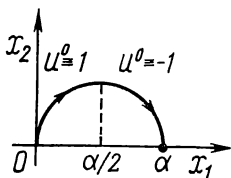


Рис. VII.18

Найдем момент времени  $t^*$ , в который происходит переключение управления:

$$g_1(t_1 - t^*) + g_2 = 0, \quad t^* = t_1 + g_2/g_1, \quad g_2 \cdot g_1 < 0.$$

Будем считать, что  $g_1 > 0$  (в противном случае получили бы  $t_1^0 = 0$ ). Тогда  $-g_1 \alpha + \int_0^{t_1^*} [g_1(t_1 - t) + g_2] dt =$

$-\int_{t^*}^{t_1} [g_1(t_1 - t) + g_2] dt = 0$ . Отсюда  $g_1/2 \cdot t_1^2 + g_2 t_1 + g_2^2/g_1 - g_1 \alpha = 0$ . Значит,  $t_1 = -g_2/g_1 \pm \sqrt{-g_2^2/g_1^2 + 2\alpha}$ . Нетрудно подсчитать, что время оптимального быстрогодействия равно  $t_1^0 = 2\sqrt{\alpha}$ . При этом

$$g_1^0 = 1/\sqrt{\alpha + 1}, \quad g_2^0 = -\sqrt{\alpha}/\sqrt{\alpha + 1}.$$

В силу принципа максимума

$$u^0(t) = \text{sign} [g_1^0(t_1^0 - t) + g_2^0] = \text{sign} [\sqrt{\alpha} - t].$$

Оптимальное управление в задаче состоит (рис. VII.18) из участка  $u \equiv 1$  и участка  $u \equiv -1$ .

**3. Минимизация квадратичного критерия качества.** Рассмотрим задачу минимизации в классе кусочно-непрерывных управлений функционала

$$I(u) = \int_0^{t_1} [x'(t) Lx(t) + u^2(t)] dt \rightarrow \min (L > 0) \quad (17)$$

на траекториях управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = [0, t_1]. \quad (18)$$

Функция Гамильтона для задачи (17), (18) имеет вид (см. § 2)

$$H(x, \psi, u) = -x' Lx - u^2 + \psi' (Ax + bu).$$

Сопряженная система дает:

$$\dot{\psi} = -A' \psi + 2Lx, \quad \psi(t_1) = 0.$$

Условие максимума:  $u^0(t) = 1/2 \psi'(t) b$ .

Если от задачи (17), (18) перейти к терминальной задаче оптимального управления и воспользоваться формулой приращения (10) § 2, то получим, что  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 \geq 0$ . Таким образом, как и в случае задачи п. 2, принцип максимума для задачи (17), (18) доставляет достаточное условие оптимальности. Однако опять краевая задача принципа максимума

$$\dot{x} = Ax + b/2 \cdot \psi'(t) b, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{\psi} = -A' \psi + 2Lx, \quad \psi(t_1) = 0,$$

хотя и линейна, а потому и доступна эффективному решению, например, методами прогонки, приводит к операциям и результатам, которые более сложны и менее удобны в реализации, чем те, которые сейчас получим методом динамического программирования.

Согласно § 2 гл. V уравнение Беллмана для задачи (17), (18) имеет вид

$$-\partial B(x, \tau) / \partial \tau = \min_u \{ (Ax + bu)' \partial B(x, \tau) / \partial x + x' Lx + u^2 \}, \quad (19)$$

$$B(x, t_1) = 0. \quad (20)$$

Минимум по  $u$  в правой части уравнения достигается в точке

$$u(x, \tau) = -1/2 \cdot b' \partial B(x, \tau) / \partial x, \quad (21)$$

которая получается приравниванием нулю производной по  $u$ .

Подставив (21) в (19), приведем уравнение Беллмана к виду

$$-\partial B(x, \tau)/\partial \tau = x' A' \partial B(x, \tau)/\partial x + x' L x - \\ - 1/4 \cdot [b' \partial B(x, \tau)/\partial x]^2. \quad (22)$$

Решение уравнения (22) с граничным условием (20) будем искать в виде

$$B(x, \tau) = x' M(\tau) x, \quad (23)$$

где  $M(\tau) = M'(\tau)$  —  $n \times n$ -матричная функция.

Подставим (23) в (22), (20) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$\dot{M} = -L - 2MA + Mbb'M, \quad M(t_1) = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) называется *матричным уравнением Риккати*. При сделанных предположениях оно имеет гладкое решение, определенное на отрезке  $T$ .

Таким образом, построено гладкое решение (23) уравнения Беллмана (19), (20). Поэтому (см. § 2) управление (21) является оптимальным в задаче (17), (18).

Если функцию (23) подставить в (21), получим

$$u(x, \tau) = -b'M(\tau)x,$$

т. е. оптимальное управление в задаче (17), (18) линейно относительно состояния  $x$ .

Используя (24), можно подсчитать минимальное значение критерия качества:

$$I(u^0) = B(x_0, 0) = x_0' M(0) x_0.$$

Пусть в задаче (17), (18)  $t_1 = \infty$ . Для решения этой задачи рассмотрим последовательность задач (17), (18) с  $t_1 \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $M_{t_1}(\tau)$  решение уравнения (24) при фиксированном  $t_1$ .

**Теорема 2.** Для существования в задаче (17), (18) с  $t_1 \rightarrow \infty$  линейного оптимального закона управления необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} M_{t_1}(0) = M. \quad (25)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть найден закон управления  $u^0$ , который доставляет функционалу

$I_{\infty}(u), I_{\infty}(u) = \int_0^{\infty} (x' Lx + u^2) dt$ , минимальное значение.

Построим последовательность положительных чисел  $t^1 < t^2 < \dots < t^n < \dots$  и последовательность квадратичных форм

$$\int_0^{t^1} (x' Lx + (u^1)^2) dt, \int_0^{t^2} (x' Lx + (u^2)^2) dt, \dots, \\ \int_0^{t^n} (x' Lx + (u^n)^2) dt, \dots,$$

где  $u^i$  — оптимальный закон управления, доставляющий минимальное значение функционалу  $I_{t^i}(u^i) = \int_0^{t^i} (x' Lx + (u^i)^2) dt$ . Эта последовательность является монотонно возрастающей:

$$\int_0^{t^i} (x' Lx + (u^i)^2) dt \leq \int_0^{t^i} (x' Lx + (u^{i+1})^2) dt \leq \\ \leq \int_0^{t^{i+1}} (x' Lx + (u^{i+1})^2) dt.$$

Кроме того, она ограничена при каждом  $x_0$ , так как

$$\int_0^{t^i} (x' Lx + (u^i)^2) dt \leq \int_0^{t^i} (x' Lx + (u^0)^2) dt \leq \\ \leq \int_0^{\infty} (x' Lx + (u^0)^2) dt$$

для любого  $t^i$ . Значит, последовательность квадратичных форм

$$x'_0 M_{t^1}(0) x_0, x'_0 M_{t^2}(0) x_0, \dots, x'_0 M_{t^n}(0) x_0, \dots$$

сходится при любых  $x_0$  к некоторой квадратичной форме  $x'_0 M x_0$  с постоянными коэффициентами. Необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть выполнено условие (25).  
Значит,

$$\lim_{t^n \rightarrow \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt = \lim_{t^n \rightarrow \infty} x'_0 M_{t^n}(0) x_0 = x'_0 M x_0 < +\infty.$$

Утверждается, что управление

$$u^0(x) = -\lim_{t^n \rightarrow \infty} b' M_{t^n}(0) x = -b' M x \quad (26)$$

есть оптимальное управление для задачи (17), (18) с  $t_1 \rightarrow \infty$ . Заметим, что в силу стационарности задачи выполняется соотношение

$$\lim_{t^n \rightarrow \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt = \int_0^{\infty} (x' L x + (u^0)^2) dt. \quad (27)$$

Действительно, для каждого фиксированного  $\bar{t}$ ,  $\bar{t} < t^n$ :

$$\int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt \geq \int_0^{\bar{t}} (x' L x + (u^0)^2) dt.$$

При этом

$$\lim_{t^n \rightarrow \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt \geq \int_0^{\bar{t}} (x' L x + (u^0)^2) dt.$$

Переходя к пределу при  $\bar{t} \rightarrow +\infty$ , получаем

$$\lim_{t^n \rightarrow \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt \geq \int_0^{\infty} (x' L x + (u^0)^2) dt. \quad (28)$$

С другой стороны,

$$\int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt \leq \int_0^{t^n} (x' L x + (u^0)^2) dt,$$

т. е.

$$\lim_{t^n \rightarrow \infty} \int_0^{t^n} (x' L x + (u^n)^2) dt \leq \int_0^{\infty} (x' L x + (u^0)^2) dt.$$

Отсюда и из (28) следует (27).

Допустим, что указанное управление (26) не является оптимальным. Тогда существует управление  $\bar{u}$ , для которого

$$\int_0^{\infty} (x' L x + \bar{u}^2) dt < \int_0^{\infty} (x' L x + (u^0)^2) dt, \quad (29)$$

но

$$\int_0^{t^n} (x' L x + \bar{u}^2) dt \geq \int_0^{t^n} (x' L x + (u^0)^2) dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} (x' L x + \bar{u}^2) dt \geq \int_0^{\infty} (x' L x + (u^0)^2) dt,$$

что противоречит (29). Теорема доказана.

Итак, управление (26) является оптимальным в задаче

$$\int_0^{\infty} (x' L x + u^2) dt \rightarrow \min, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0.$$

Оказывается, что управление (26) стабилизирует систему  $\dot{x} = Ax + bu$ , т. е. после замыкания последней обратной связи (26) получается асимптотически устойчивая система

$$\dot{x} = (A - bb'M)x.$$

Это свойство полученного решения задачи (17), (18) с  $t_1 = \infty$  широко используется в прикладных задачах управления для стабилизации неустойчивых объектов.

## § 6. Оптимальное управление дискретными процессами

Процессы (системы), состояние которых изменяется или доступно измерению только в дискретные моменты времени, называются *дискретными* (*многошаговыми*, *многоэтапными*). Они возникают при моделировании многих прикладных задач. К ним сводятся непрерывные по времени процессы (гл. VI, VII) перед этапом использования ЭВМ (дискретного действия). Именно для решения задачи оптимизации дискретных процессов, составляющих специальный класс задач нелинейного программирования (гл. III, IV), был создан метод динамического программирования (гл. V).

1. Дискретный принцип максимума. Рассмотрим про-

цесс (систему),  $n$ -мерное состояние  $x(t)$  которого изменяется в дискретные моменты времени  $t_0, t_0+h, t_0+2h, \dots$ , ( $h>0$ ) согласно рекуррентному уравнению

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t) + hf(x(t), u(t), t), \\x(t_0) &= x_0, \quad t \in T = [t_0, t_0+h, \dots, t_1-h],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $u(t)$  —  $r$ -вектор управления в момент  $t$ ;  $h>0$  — шаг дискретного процесса. Модель (1) получается, например, из непрерывной модели  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , если положить  $\dot{x}(t) \approx (x(t+h) - x(t))/h$ .

Последовательность  $r$ -векторов  $u(t)$ ,  $t \in T$ , принимающих значение из заданных множеств  $U(t)$   $r$ -мерного пространства

$$u(t) \in U(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

назовем *допустимым управлением*. По каждому допустимому управлению  $u(t)$ ,  $t \in T$ , можно согласно (1) построить последовательность  $n$ -векторов  $x(t)$ ,  $t \in T_1 = [t_0, t_0+h, \dots, t_1]$ , которая называется *допустимой траекторией* дискретной системы (1). Задача минимизации целевой функции (*критерия качества*)

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min \quad (3)$$

на допустимых управлениях называется *простейшей задачей терминального управления дискретной системой*.

Если вектор  $x(t_1)$  найти из (1) и подставить в (3), то получится задача нелинейного программирования. При больших  $t_1 - t_0$  или малых  $h$ , что типично для задач управления, полученная задача будет иметь огромное количество переменных и прямое применение методов гл. III, IV станет затруднительным или неэффективным. Поэтому для решения задачи (1) — (3) необходимо учесть ее специальную структуру, которая состоит в «динамичности» ограничений (1).

В данном пункте задача (1) — (3) интерпретируется как дискретный аналог задачи § 2 и для нее доказываем *дискретный вариант принципа максимума Понтрягина* в предположении, что  $f(x, u, t)$ ,  $\partial f(x, u, t)/\partial x$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\partial \varphi(x)/\partial x \in C$ .

Решение  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ ;  $x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ , задачи (1) — (3) назовем *оптимальным управлением и траекторией*.

Наряду с  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , рассмотрим другое допустимое

управление  $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , и вычислим приращение

$$\begin{aligned} \Delta I(u^0) &= I(u) - I(u^0) = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \\ &= \Delta x'(t_1) \partial \varphi(x^0(t_1)) / \partial x + o(\|\Delta x(t_1)\|), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ ;  $x(t)$ ,  $t \in T_1$ , — траектория системы (1), соответствующая управлению  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

Для произвольных  $n$ -вектор-функций  $\Delta x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ ,  $\Delta x(t_0) = 0$ , справедливо тождество

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+h) &= \sum_{t \in T} \psi'(t-h) \Delta x(t) + \\ &+ \psi'(t_1-h) \Delta x(t_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Положив

$$\psi(t_1-h) = -\partial \varphi(x^0(t_1)) / \partial x, \quad (6)$$

из (4), (5) получим

$$\begin{aligned} \Delta I(u^0) &= - \sum_{t \in T} \psi'(t) \Delta x(t+h) + \\ &+ \sum_{t \in T} \psi'(t-h) \Delta x(t) + o(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку приращение  $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t)$  траектории удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Delta x(t+h) &= \Delta x(t) + h[f(x^0(t) + \Delta x(t), u^0(t) + \Delta u(t), t) - \\ &- f(x^0(t), u^0(t), t)], \Delta x(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

то, введя обозначения

$$H(x, \psi, u, t) = \psi'[x + hf(x, u, t)],$$

$$\Delta_u H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, \psi, u, t),$$

можно записать

$$\begin{aligned} \psi'(t) \Delta x(t+h) &= H(x^0 + \Delta x, \psi, u^0 + \Delta u, t) - H(x^0, \psi, u^0, t) = \\ &= \Delta_u H(x^0, \psi, u^0, t) + \Delta x'(t) \partial H(x^0, \psi, u, t) / \partial x + \\ &+ o_1(\|\Delta x(t)\|). \end{aligned} \quad (9)$$



Этот результат подставим в (7) и одновременно положим

$$\psi(t-h) = \partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) / \partial x, t \in T. \quad (10)$$

В итоге получим искомую формулу приращения критерия качества

$$\Delta I(u^0) = - \sum_{t \in T} \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) + \eta, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|), \\ \eta_2 &= - \sum_{t \in T} o_1(\|\Delta x(t)\|), \\ \eta_3 &= - \sum_{t \in T} \Delta x'(t) \frac{\partial \Delta_{u(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следуя § 2, введем *аналог игольчатой вариации управления*:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u(\theta), & \theta \in T, v \in U(\theta), \\ 0, & t \in T, t \neq \theta. \end{cases} \quad (13)$$

Подставив эту функцию в уравнение (8), имеем

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &\equiv 0, t \in [t_0, \Theta], \Delta x(\Theta+h) = h \Delta_v f(x^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta), \\ \Delta x(t+h) &= \Delta x(t) + h[f(x^0(t) + \Delta x(t), u^0(t), t) - \\ &\quad - f(x^0(t), u^0(t), t)], t \in [\Theta+h, t_1-h]. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно,

$$\Delta I(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\Theta), \psi(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) + \eta, \quad (15)$$

причем  $\eta_3 = 0$ . Если  $f(x, u, t) = A(u, t)x + b(u, t)$ ,  $\varphi(x)$  — вогнутая функция, то  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_1 \leq 0$ , т. е.  $\Delta_v H(x^0(\Theta), \psi(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = -\Delta I(u^0) + \eta_1 \leq 0$ , что означает (см. § 2) выполнение *условия максимума*

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U(t)} H(x^0(t), \psi(t), u, t), t \in T, \quad (16)$$

вдоль оптимального управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ .

В общем случае условие (16) не следует из  $\Delta I(u^0) \geq 0$  и формулы (15), т. е. вариация (13) уже не позволяет доказать принцип максимума для задачи (1) — (3). Это объясняется тем, что в непрерывном случае (§ 2) существенно использовалась непрерывность времени, в силу ко-

торой параметр  $\varepsilon$  игольчатой вариации мог выбираться сколь угодно малым. В дискретных системах длина минимального отрезка времени, на котором можно независимо варьировать управления, не может быть меньше  $h > 0$ .

**Теорема 1 (дискретный принцип максимума).** Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ ,  $x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ , — оптимальные управление и траектория задачи (1) — (3) с выпуклым множеством

$$f(x, U(t), t) = \{y: y = f(x, u, t), u \in U(t)\}. \quad (17)$$

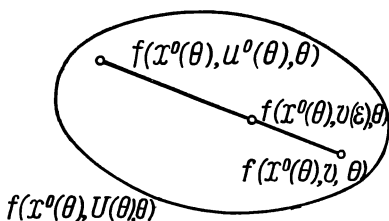


Рис. VII.19

Тогда вдоль  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ ,  $x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ , и траектории  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , сопряженной системы (6), (10) выполняется условие максимума (16).

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна, т. е. при некоторых  $\Theta \in T$ ,  $v \in U(\Theta)$  выполняется неравенство  $\Delta_v H(x^0(\Theta), \psi(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \alpha > 0$ . Построим  $r$ -вектор-функцию  $v(\varepsilon) \in U(\Theta)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , удовлетворяющую равенству

$$\begin{aligned} & f(x^0(\Theta), v(\varepsilon), \Theta) - f(x^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) = \\ & = \varepsilon [f(x^0(\Theta), v, \Theta) - f(x^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta)], \varepsilon \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу выпуклости множества (17) такая функция существует (рис. VII.19). Подставим  $v(\varepsilon)$  в (14) вместо  $v$ . Тогда непосредственным счетом проверяется, что  $\|\Delta x(t)\| \leq K\varepsilon$ ,  $t \in T$ , т. е.  $\eta \leq K_1 \varepsilon^2$ . Если равенство (18) использовать в (15), то получим  $\Delta I(u^0) = -\varepsilon \Delta_v H(x^0(\Theta), \psi(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) + \eta \leq -\varepsilon \alpha + K_1 \varepsilon^2$ . При достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отсюда следует, что  $\Delta I(u^0) < 0$ . Это противоречит оптимальности управления  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ . Теорема доказана.

Предположение (17) существенно для справедливости теоремы 1. Например, оптимальное управление  $u^0(0) = 1$ ,  $u^0(1) = 1$  задачи  $x_2(2) \rightarrow \min$ ,  $x_1(t+1) = x_1(t) + u$ ,  $x_2(t+1) = x_2(t) + x_1^2(t)$ ,  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,  $U(t) =$

$= \{u : u = \pm 1\}$ ,  $T = [0, 1]$ , не удовлетворяет принципу максимума. Действительно,  $H(x, \psi, u, t) = \psi_1(x_1 + u) + \psi_2(x_2 + x_1^2)$ ,  $\psi_1(t-1) = \psi_1(t) + 2\psi_2(t)x_1$ ,  $\psi_2(t-1) = \psi_2(t)$ ,  $\psi_1(t_1-1) = \psi_1(1) = 0$ ,  $\psi_2(1) = -1$ . Отсюда вдоль оптимальной траектории  $x_1^0(1) = 1$ ,  $x_1^0(2) = 2$ ;  $x_2^0(1) = 0$ ,  $x_2^0(2) = 1$  получаем  $\psi_1(0) = -2$ ,  $\psi_2(0) = -1$ ,  $H(x^0(0), \psi(0), u, 0) = \psi_1(0)u = -2u$ . Функция  $H(x^0(0), \psi(0), u, \theta) = -2u$ ,  $u \in U$ , в точке  $u = u^0(0) = 1$  достигает не максимума (16), а минимума.

Задача (1) — (3) при малых  $h > 0$  близка к простейшей задаче терминального управления, исследованной в § 2. Связь между необходимыми условиями оптимальности этих задач устанавливается следующим утверждением.

**Теорема 2 (принцип квазимаксимума).** Пусть при фиксированных  $t_0, t_1$  допустимые траектории системы (1) равномерно ограничены по  $h$ ,  $h \leq h_0 < \infty$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $h_* > 0$ , что каждое оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , задачи (1) — (3) с  $0 < h \leq h_*$  вместе с соответствующими решениями  $x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , систем (1), (6), (10) удовлетворяет условию  $\varepsilon$ -максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \geq H(x^0(t), \psi^0(t), u, t) - \varepsilon$$

для всех  $u \in U(t)$ ,  $t \in T$ .

**Доказательство.** Предположим, что теорема неверна: существует такое число  $\varepsilon_* > 0$ , что для каждого сколь угодно малого  $h > 0$  найдутся такие  $\Theta = \Theta(h) \in T$  и  $v = v(h) \in U(\Theta)$ , что  $H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) - H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), v, \Theta) + \varepsilon_* = \alpha = \alpha(h) < 0$ . Приложим к управлению  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , вариацию (13). По аналогии с § 2 нетрудно показать, что  $\|\Delta x(t)\| \leq Kh$ , причем в силу равномерной ограниченности траекторий  $x^0(t)$ ,  $t \in T_1$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , постоянную  $K$  можно выбрать не зависящей от  $h$ ,  $0 < h < h_0$ . Из формулы приращения (15) получим

$$\begin{aligned} \Delta I(u^0) &= -\Delta_v H(x^0(\Theta), \psi^0(\Theta), u^0(\Theta), \Theta) + o(h) = \\ &= \alpha - \varepsilon_* + o(h). \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку  $\alpha - \varepsilon_* < 0$  для любых  $h$ ,  $0 < h < h_0$ , и  $\varepsilon_*$  не зависит от  $h$ , то правая часть (19) при достаточно малых  $h$  меньше нуля:  $\Delta I(u^0) < 0$ , что противоречит оптимальности  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ . Теорема доказана.

**2. Решение задачи (1)—(3) методом динамического программирования.** Погрузим задачу (1)—(3) в семейство задач

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad x(t+h) = x(t) + hf(x(t), u(t), t), \\ x(\tau) = x, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in [\tau, t_1 - h], \quad (20)$$

зависящее от параметров  $\tau, x$ . Пусть  $B(x, \tau)$  — функция Беллмана — минимальное значение критерия качества для общей задачи семейства. В момент  $t = \tau$  выбираем произвольное управление  $u(\tau) = v$ , а с момента  $t = \tau + h$  пусть система (1) управляется оптимально. Поскольку  $x(\tau + h) = x(\tau) + hf(x, v, \tau)$ , то значение критерия качества при выбранном управлении равно  $B(x(\tau + h), \tau + h) = B(f(x, v, \tau), \tau + h)$ . Найдя минимум по  $v \in U(\tau)$  среди этих чисел, получим уравнение Беллмана

$$B(x, \tau) = \min_{v \in U(\tau)} B(f(x, v, \tau), \tau + h). \quad (21)$$

При  $\tau = t_1 - h$  из определения функции Беллмана получается начальное условие для уравнения (21):

$$B(x, t_1 - h) = \min_{v \in U(t_1 - h)} \varphi(f(x, v, t_1 - h)). \quad (22)$$

Решение задачи (1)—(3) получается следующим образом. Найдя из (22) функцию  $B(x, t_1 - h)$  и отметив вектор  $u(x, t_1 - h)$ , на котором достигается минимум справа, подставим  $B(x, t_1 - h)$  в (21) и вычислим функции  $B(x, t_1 - 2h)$  и  $u(x, t_1 - 2h)$ . Продолжив процесс, найдем из (21) функции  $B(x, t_1 - 3h)$ ,  $u(x, t_1 - 3h)$ , ...,  $B(x, t_0)$ ,  $u(x, t_0)$ . Понятно, что  $B(x_0, t_0)$  — минимальное значение критерия качества в исходной задаче (1)—(3),  $u(x_0, t_0)$  — значение оптимального управления для начальной позиции  $\{x_0, t_0\}$ . Подставив  $u^0(t_0) = u(x_0, t_0)$  в (1), получим оптимальное состояние  $x^0(t_0 + h) = f(x_0, u^0(t_0), t_0)$  системы в момент  $t_0 + h$ . Оптимальное управление в этот момент  $t_0 + h$  равно  $u^0(t_0 + h) = u(x^0(t_0 + h), t_0 + h)$ . Продолжив этот процесс, найдем оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ .

Достоинство метода динамического программирования по сравнению с дискретным принципом максимума состоит в том, что в нем не делается никаких предположений типа выпуклости и гладкости относительно элементов задачи (1)—(3), а результат — оптимальное

управление. Трудность практического использования описанной схемы заключается в том, что при  $n \geq 2$  резко возрастают требования к объему оперативной памяти ЭВМ для хранения функций  $B(x, t)$ ,  $t \in T$ .

**3. Оптимизация стохастической системы.** Пусть  $w(t)$ ,  $t \in T = [t_0, t_0+1, \dots, t_1-1]$ , — скалярный дискретный случайный процесс, который принимает независимые значения  $k \in \Omega_w(t)$  с вероятностью  $p_w(k, t)$ . Рассмотрим дискретную систему

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), w(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T, \quad (23)$$

подверженную действию возмущения  $w(t)$ ,  $t \in T$ . Каждому допустимому управлению  $u(t) \in U(t)$ ,  $t \in T$ , соответствует случайный процесс  $x(t)$ ,  $t \in T_1 = [t_0, t_0+1, \dots, t_1]$ , вероятностные характеристики  $p_x(\xi, t)$  которого определяются процессом  $w(t)$ ,  $t \in T$ .

Качество управления  $u(t)$ ,  $t \in T$ , оценим значением *целевой функции*

$$I(u) = M\varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (24)$$

где  $M\varphi(x(t_1))$  — математическое ожидание случайной величины  $\varphi(x(t_1))$ , определенной на конечных состояниях  $x(t_1)$  системы (23).

Будем считать, что в каждый момент  $t \in T$  доступно измерению состояние  $x(t)$  системы (23) и по этой информации делается выбор значения  $u(t)$  допустимого управления.

Погрузим задачу (23), (24) в семейство

$$\begin{aligned} I(u) &= M\varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \\ x(t+1) &= f(x(t), u(t), w(t), t), \quad x(\tau) = \\ &= x, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in [\tau, t_1-1], \end{aligned} \quad (25)$$

и введем функцию Беллмана  $B(x, \tau)$  — минимальное значение целевой функции задачи (25).

В момент  $t = \tau$  для состояния  $x(\tau) = x$  сделаем пробный выбор управления  $u(\tau) = v \in U(\tau)$ . Под действием этого управления система (23) в момент  $t = \tau+1$  с вероятностью  $p_w(k, \tau)$ ,  $k \in \Omega_w(\tau)$ , перейдет в состояние  $x(\tau+1) = f(x, v, k, \tau)$ . Предположим, что, начиная с момента  $\tau+1$  и состояния  $x(\tau+1)$ , система (23) управляется оптимальным образом. Следовательно, при сделанном выборе  $v$  и указанном продолжении управления целевая

функция задачи (25) с вероятностью  $p_w(k, \tau)$  примет значение  $B(x(\tau+1), \tau+1) = B(f(x, v, k, \tau), \tau+1)$ . Среднее значение целевой функции будет равно  $\sum_{k \in \Omega_w(\tau)} p_w(k, \tau) B(f(x, v, k, \tau), \tau+1) = M_{w(\tau)} B(f(x, v, \omega, \tau), \tau+1)$ . Перебрав все векторы  $v \in U(\tau)$ , найдем значение оптимального управления  $u(x, \tau)$ :

$$\begin{aligned} M_{w(\tau)} B(f(x, u(x, \tau), \omega, \tau), \tau+1) = \\ = \min_{v \in U(\tau)} M_{w(\tau)} B(f(x, v, \omega, \tau), \tau+1) \end{aligned} \quad (26)$$

и уравнение Беллмана

$$B(x, \tau) = \min_{v \in U(\tau)} M_{w(\tau)} B(f(x, v, \omega, \tau), \tau+1). \quad (27)$$

Стандартно получается и начальное условие

$$B(x, t_1 - 1) = \min_{v \in U(t_1 - 1)} M_{w(t_1 - 1)} \varphi(f(x, v, \omega, t_1 - 1)). \quad (28)$$

Для решения задачи (23), (24) по аналогии с п. 2 из (27), (28) получают последовательности функций Беллмана  $B(x, t_1 - 1), \dots, B(x, t_0)$  и оптимальных законов управления  $u(x, t_1 - 1), \dots, u(x, t_0)$ .

Процедура оптимального управления системой (23) состоит в следующем. В момент  $t = t_0$  для известного состояния  $x_0$  выбирается управление  $u^0(t_0) = u(x_0, t_0)$ . Случайная величина  $\omega(t_0)$  примет некоторое значение  $k \in \Omega_w(t_0)$ , и система (23) под действием  $u^0(t_0)$ ,  $\omega(t_0) = k$  перейдет в состояние  $x^0(t_0 + 1)$ , которое, по предположению, доступно измерению. Для момента  $t = t_0 + 1$  и состояния  $x^0(t_0 + 1)$  описанные операции повторяются.

**4. Игровое управление.** Динамическое программирование можно использовать для решения задач оптимизации, когда в процессе управления участвуют две стороны, интересы которых не совпадают. Большое значение здесь имеет степень информированности участников о действиях противника. Можно выделить два случая: а) один из участников знает очередной ход другого, б) участники делают ходы одновременно и не могут определенно знать о ходах противника.

1°. Пусть игровой процесс описывается уравнением

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), \omega(t), t), x(t_0) = x_0, \quad (29)$$

где  $u(t) \in U(t)$ ,  $w(t) \in W(t)$  — допустимые управления первого и второго участников соответственно. Предположим, что качество игры оценивается функционалом

$$I(u, w) = \varphi(x(t_1)). \quad (30)$$

Процесс игры протекает таким образом. Для каждого состояния  $x$ , реализовавшегося в момент  $t$ , участник 1 выбирает управление  $u(x, t) \in U(t)$ , участник 2, зная  $u(x, t)$ , выбирает  $w(x, t) = w(x, t, u(x, t)) \in W(t)$ . Подстановка этих значений в (29) дает состояние  $x(t+1)$ . В состоянии  $x(t+1)$  процедура повторяется: сначала выбирается управление  $u(x(t+1), t+1)$ , затем  $w(x(t+1), t+1)$ . Цель участника 1 — минимизировать, цель участника 2 — максимизировать критерий качества (30).

Аналитически описанную процедуру выбора управлений можно записать так:

$$\begin{aligned} I(u^0, w^0) = & \min_{u(x(t_0))} \max_{w(x(t_0))} \min_{u(x(t_0+1))} \max_{w(x(t_0+1))} \dots \\ & \dots \min_{u(x(t_1-1))} \max_{w(x(t_1-1))} \varphi(x(t_1)). \end{aligned}$$

Погрузим процесс (29) в семейство

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), w(t), t), \quad x(\tau) = x, \\ u(t) &\in U(t), \quad w(t) \in W(t), \quad t \in [\tau, t_1-1], \end{aligned} \quad (31)$$

на котором определим функцию Беллмана:

$$\begin{aligned} B(x, \tau) = & \min_{\substack{u(x) \\ x(\tau)=x}} \max_{w(x)} \min_{u(x(\tau+1))} \max_{w(x(\tau+1))} \dots \\ & \dots \min_{u(x(t_1-1))} \max_{w(x(t_1-1))} \varphi(x(t_1)). \end{aligned}$$

Функция  $B(x, \tau)$  удовлетворяет уравнению

$$B(x, \tau) = \min_{u \in U(\tau)} \max_{w \in W(\tau)} B(f(x, u, w, \tau), \tau+1) \quad (32)$$

с начальным условием

$$B(x, t_1-1) = \min_{u \in U(t_1-1)} \max_{w \in W(t_1-1)} \varphi(f(x, u, w, t_1-1)). \quad (33)$$

Рассуждая, как в пп. 2, 3, из (32), (33) получаем последовательности  $B(x, t_1-1), \dots, B(x, t_0); u(x, t_1-1), \dots, u(x, t_0), w(x, t_1-1), \dots, w(x, t_0)$ .

Значение  $B(t_0, x_0)$  равно  $I(u^0, w^0)$ . Оптимальное управление  $u^0(t)$  и траектория  $x^0(t)$  при оптимальном поведении второго участника находятся из соотношений

$$\begin{aligned} u^0(t_0) &= u(x_0, t_0), \quad w^0(t_0) = w(x_0, t_0), \quad x^0(t_0+1) = \\ &= f(x_0, u^0(t_0), w^0(t_0), t_0), \dots, \quad u^0(t) = u(x^0(t), t), \\ w^0(t) &= w(x^0(t), t), \quad x^0(t+1) = f(x^0(t), u^0(t), w^0(t), t), \dots \end{aligned}$$

Рассмотренную задачу можно считать игрой, когда участник 2 более информирован, чем участник 1.

2°. Не меняя цели игроков, изменим предположение об информированности. Пусть участник 1 на каждом шаге знает очередной ход участника 2 (иначе говоря, на каждом шаге участник 2 выбирает свое управление первым). Тогда задача сводится к нахождению таких законов управления  $w = w(x, t)$ ,  $u = u(x, t) = u(x, t, w(x, t))$ , что

$$I(u^0, w^0) = \max_{w(x(t_0))} \min_{u(x(t_0))} \dots \max_{w(x(t_1-1))} \min_{u(x(t_1-1))} \varphi(x(t_1)).$$

Рассуждая, как и в предыдущей игре, приходим к уравнению Беллмана:

$$B(x, t) = \max_{w \in W(t)} \min_{u \in U(t)} B(f(x, u, w, t), t+1)$$

с начальным условием

$$B(x, t_1-1) = \max_{w \in W(t)} \min_{u \in U(t)} \varphi(f(x, u, w, t_1-1)),$$

которое решается так же, как и уравнение (32), (33).

3°. Ситуация усложняется, если участники делают ходы одновременно, не зная об очередных ходах противника.

Пусть множества  $U(t)$ ,  $W(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1-1]$ , состоят из конечного набора векторов и в начале каждого хода участники не сами делают выбор управления, а поручают его случайному механизму. Каждый игрок может влиять на работу этого механизма путем задания закона распределения вероятностей, который имеет случайный вектор управления на очередном ходе. Будем считать, что значения случайных векторов  $u(t)$ ,  $w(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1-1]$ , независимы. Игра по указанному правилу приведет процесс  $x(t)$  в момент  $t=t_1$  в состояние  $x(t_1)$ , которое, оче-



видно, является случайным вектором. Один из возможных способов оценки поведения участников следующий:

$$I(p^0, q^0) = \min_{p(x(t_0))} \max_{q(x(t_0))} \min_{p(x(t_0+1))} \max_{q(x(t_0+1))} \dots \\ \dots \min_{p(x(t_1-1))} \max_{q(x(t_1-1))} M \varphi(x(t_1)). \quad (34)$$

Здесь  $p(x) = \{p^1(x), \dots, p^{K(t)}(x)\}$  — распределение вероятностей вектора  $u$  в момент  $t$ , когда процесс находится в состоянии  $x$ ;  $q(x) = \{q^1(x), \dots, q^{L(t)}(x)\}$  — распределение вероятностей вектора  $w$  в момент  $t$ ;  $M$  — математическое ожидание, вычисленное по всем распределениям  $p(x(t_0)), \dots, p(x(t_1-1)), q(x(t_0)), \dots, q(x(t_1-1))$ .

В силу теоремы о минимаксе операции  $\min$  и  $\max$  в пределах одного шага перестановочны. Поэтому

$$I(p^0, q^0) = \max_{q(x(t_0))} \min_{p(x(t_0))} \min_{p(x(t_0+1))} \max_{q(x(t_0+1))} \dots \\ \dots \min_{p(x(t_1-1))} \max_{q(x(t_1-1))} M \varphi(x(t_1)). \quad (35)$$

Погрузив процесс (29) в семейство процессов и воспользовавшись равенствами (34), (35), приходим к следующему уравнению Беллмана:

$$B(x, t) = \min_{\substack{0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum p_i = 1}} \max_{\substack{0 \leq q_j \leq 1 \\ \sum q_j = 1}} \left[ \sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j B(f(x, u^i, w^j, t), t+1) \right] = \\ = \max_{\substack{0 \leq q_j \leq 1 \\ \sum q_j = 1}} \min_{\substack{0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum p_i = 1}} \left[ \sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j B(f(x, u^i, w^j, t), t+1) \right] \quad (36)$$

и начальному условию

$$B(x, t_1-1) = \max_{\substack{0 \leq q_j \leq 1 \\ \sum q_j = 1}} \min_{\substack{0 \leq p_i \leq 1 \\ \sum p_i = 1}} \left[ \sum_{i,j=1}^{K(t), L(t)} p_i q_j \Phi(f(x, u^i, w^j, t_1-1)) \right]. \quad (37)$$

Решение уравнений (36), (37) аналогично решениям уравнений Беллмана в предыдущих задачах этого пункта.

## § 7. Оптимизация систем с распределенными параметрами

До сих пор рассматривались задачи оптимизации, которые типичны для систем с конечным числом степеней свободы. Подобные системы принято называть *системами с сосредоточенными параметрами*. Многие реальные объекты и процессы имеют бесконечное число степеней свободы, и их называют *системами с распределенными параметрами*. При математическом описании таких систем используются разнообразные уравнения в частных производных, интегродифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами и т. п. Принципы, положенные в основу оптимизации систем с распределенными параметрами, являются такими же, как и для систем с сосредоточенными параметрами, однако их реализация в связи с более высоким уровнем сложности новых объектов встречает большие технические трудности. В данном параграфе рассматриваются две простые задачи, являющиеся аналогами исследованных ранее задач вариационного исчисления и оптимального управления.

**1. Простейшая задача вариационного исчисления с распределенными параметрами.** Допустимыми функциями назовем скалярные функции  $v = v(x, y)$  двух переменных  $z = \{x, y\}$ , определенные в области  $G$  пространства  $R_2$ , непрерывные там вместе со своими производными до второго порядка и принимающие на границе  $L$  области заданные значения

$$v(s) = c(s), \quad s \in L.$$

Среди допустимых функций требуется найти такую (*минималь*), на которой функционал

$$I(v) = \iint_G F(x, y, v, v_x, v_y) dx dy \quad (1)$$

принимает минимальное значение.

Относительно функции  $F$  будем предполагать, что она принадлежит классу  $C^{(2)}$ .

По аналогии с § 2 гл. VI вводятся понятия *слабого минимума*, *вариации допустимой функции*, *вариации функционалов*. Необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций имеют вид

$$\delta I(v, h) = 0, \quad (2)$$

где

$$\delta I(v, h) = \iint_G \left( \frac{\partial F}{\partial v} h + \frac{\partial F}{\partial v_x} h_x + \frac{\partial F}{\partial v_y} h_y \right) dx dy \quad (3)$$

есть первая вариация функционала (1).

Для упрощения условия (2) используется аналог леммы Лагранжа: если

$$\iint_G a(x, y) h(x, y) dx dy \equiv 0$$

для непрерывной функции  $a(x, y)$ ,  $\{x, y\} \in G$ , и всех функций  $h(x, y) \in C^{(1)}$  таких, что  $h(x, y) = 0$ ,  $\{x, y\} \in L$ , то  $a(x, y) \equiv 0$ ,  $\{x, y\} \in G$ .

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} h F_{v_x} = h_x F_{v_x} + h \frac{d}{dx} F_{v_x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} h F_{v_y} = h_y F_{v_y} + h \frac{d}{dy} F_{v_y},$$

то в силу (3) можно записать

$$\begin{aligned} \delta I(v, h) = & \iint_G \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y} \right) h dx dy + \\ & + \iint_G \left( \frac{\partial}{\partial x} h F_{v_x} + \frac{\partial}{\partial y} h F_{v_y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

К последнему интегралу применим формулу Грина

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$$

(аналог формулы интегрирования по частям):

$$\iint_G \left( \frac{\partial}{\partial x} h F_{v_x} + \frac{\partial}{\partial y} h F_{v_y} \right) dx dy = \int_L h F_{v_x} dy - h F_{v_y} dx.$$

Поскольку  $h(x, y) \equiv 0$ ,  $\{x, y\} \in L$ , то последний интеграл равен нулю и первая вариация функционала принимает вид

$$\delta I(v, h) = \iint_G \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y} \right) h dx dy.$$

Отсюда в силу аналога леммы Лагранжа получаем *уравнение Эйлера — Остроградского*

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} F_{v_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{v_y} = 0,$$

которому должна удовлетворять каждая слабая минимальная простейшей задачи с распределенными параметрами.

**Пример.** Поиск поверхности, натянутой на заданный контур:

$$\{x, y, v: x=x(s), y=y(s), v=c(x(s), y(s)), 0 \leq s \leq 1\}$$

и имеющей минимальную площадь, сводится к задаче

$$I(v) = \iint_G \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dx dy \rightarrow \min,$$

где  $G$  — область, ограниченная линией  $\{x, y: x=x(s), y=y(s), 0 \leq s \leq 1\}$ .

Уравнение Эйлера — Остроградского в данном случае имеет вид

$$v_{xx}(1 + v_y^2) - 2v_{xy}v_xv_y + v_{yy}(1 + v_x^2) = 0.$$

Выражение в левой части уравнения с точностью до положительного множителя совпадает со *средней кривизной* поверхности. Следовательно, искомая поверхность должна иметь *нулевую кривизну*, т. е. ее нужно искать среди *минимальных* поверхностей.

**2. Задача оптимального управления одной системой с распределенными параметрами.** Рассмотрим стержень длины  $l$ , левый конец которого теплоизолирован, а правый находится в среде, температуру которой можно менять.

Обозначим через  $v(x, t)$  — температуру стержня в точке  $x$  в момент  $t$ . Распределение температуры в стержне описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Условие на левом конце

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0,$$

на правом

$$\lambda \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = \alpha (u(t) - v(l, t)),$$

начальное условие

$$v(x, 0) = 0.$$

Здесь  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена,  $u(t)$  — температура среды на правом конце стержня, которую примем за управление.

Допустимым управлением назовем измеримую функцию  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , стесненную ограничением

$$|u(t)| \leq L, \quad t \geq 0.$$

Среди допустимых управлений будем искать такое  $u^0(t)$ , на котором достигается минимума критерий качества

$$I(u) = \int_0^l (v(x, T) - v^*(x))^2 dx,$$

где  $T$  — заданный момент времени;  $v_x^*$  — заданное распределение температуры в стержне.

Пусть  $u^0(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — оптимальное управление;  $v^0(x, T)$  — оптимальное распределение температуры в стержне в момент  $t = T$ ,  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $v(x, T)$  — другая допустимая пара.

Управление

$$u_\varepsilon(t) = u^0(t) + \varepsilon[u(t) - u^0(t)]$$

является допустимым при любом  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Из оптимальности управления  $u^0(t)$  следует, что

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(u_\varepsilon) \big|_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

Поскольку с помощью функции Грина можно записать

$$v_\varepsilon(x, T) = \int_0^T K(x, T, t) u_\varepsilon(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I(u_\varepsilon) \big|_{\varepsilon=0} &= 2 \int_0^l (v^0(x, T) - \\ &- v^*(x)) \int_0^T K(x, T, t) (u(t) - u^0(t)) dt dx \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Построив управление  $u(t)$  с помощью игольчатой вариации (см. § 2), получаем из (4) неравенство

$$\int_0^l (v^0(x, T) - v^*(x)) K(x, T, \theta) (u - u^0(\theta)) dx \geq 0$$

для всех  $|u| \leq L$ , которое эквивалентно условию

$$u^0(t) = -\operatorname{sign} \int_0^t (v^0(x, T) - v^*(x)) K(x, T, t) dx.$$

Если подставить сюда выражение  $v^0(x, T)$  через  $u^0(t)$  с помощью функции Грина, то получится интегральное уравнение, решение которого — оптимальное управление  $u^0(t)$ .

## § 8. Линейные дифференциальные игры

Математическая модель конфликтных ситуаций, в которых участвуют стороны с несовпадающими интересами, называется *игрой*. Если при описании игры используются дифференциальные уравнения, то игра называется *дифференциальной*. Распространенные модели дифференциальных игр являются обобщениями соответствующих моделей оптимального управления, включающими две или несколько групп управлений, выбором которых распоряжаются лица, преследующие различные цели.

**1. Постановка задачи.** Имеются два игрока  $P_1$  и  $P_2$  — участники игры, оказывающие влияние на процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad (1)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  —  $(n \times n)$ -,  $(n \times r)$ -,  $(n \times s)$ -матрицы соответственно. В распоряжении игроков  $P_1$  и  $P_2$  находятся управления  $u$  и  $v$  соответственно, причем в каждый момент времени игроки при выборе своего управления стеснены ограничениями

$$u \in U, v \in V, \quad (2)$$

где  $U$  и  $V$  суть выпуклые компактные подмножества из  $R_r$  и  $R_s$  соответственно. Как функции времени  $t$  управления  $u = u(t)$  и  $v = v(t)$  являются измеримыми.

Кроме того, задано выпуклое замкнутое множество  $M$  — *терминальное множество игры*.

Игра состоит в том, что игрок  $P_1$  стремится привести фазовую точку  $x$  на терминальное множество  $M$ , в то время как игрок  $P_2$  стремится не допустить попадания точки  $x$  на  $M$ . Игра считается законченной, как только точка  $x$  попадает на множество  $M$ .

В качестве *допустимых стратегий* игроков  $P_1$  и  $P_2$  рассмотрим  $\varepsilon$ -стратегии, суть которых состоит в следующем. В начальный момент  $t=0$  игрок  $P_2$  сообщает противнику  $P_1$  свое управление на некотором ненулевом отрезке времени  $\varepsilon_1$ , причем величину  $\varepsilon_1 > 0$  игрок  $P_2$  выбирает по своему усмотрению. По этой информации игрок  $P_1$  строит свое управление на том же отрезке времени. По истечении времени  $\varepsilon_1$  игрок  $P_2$  вновь сообщает отрезок времени  $\varepsilon_2$  и свое управление на нем и т. д.

Говорят, что игра, начинающаяся из точки  $x_0$ , может быть закончена за время  $T$ , если каждой  $\varepsilon$ -стратегии игрока  $P_2$  игрок  $P_1$  может противопоставить свою  $\varepsilon$ -стратегию такую, что траектория системы (1), соответствующая этим управлениям, окажется на множестве  $M$  не позднее чем за время  $T$ .

**2. Геометрическая разность множеств.** В данном пункте излагается ряд конструкций, связанных с выпуклыми множествами, которые будут использованы ниже при рассмотрении дифференциальной игры.

Пусть  $A$  и  $B$  — два выпуклых подмножества пространства  $R_n$ .

*Геометрической разностью*  $A \underline{*} B$  называется совокупность всех таких точек  $z \in R_n$ , для которых  $z + B \subset A$ , т. е.

$$A \underline{*} B = \{z \in R_n : z + B \subset A\}. \quad (3)$$

Из определения следует, что  $(A \underline{*} B) + B \subset A$ , причем  $A \underline{*} B$  есть максимальное множество, удовлетворяющее этому условию, т. е. из соотношения  $D + B \subset A$  следует  $D \subset A \underline{*} B$ .

*Свойства геометрической разности:*

а) Геометрическая разность  $A \underline{*} B$  выпуклых множеств  $A$  и  $B$  является выпуклым множеством.

*Доказательство.* Пусть  $z_1, z_2 \in A \underline{*} B$  и пусть  $\alpha$  — действительное число такое, что  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Рассмотрим точку  $\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$ . Поскольку  $\alpha B + (1 - \alpha) B = B$ , то

$$\begin{aligned} \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 + B &= \alpha (z_1 + B) + \\ &+ (1 - \alpha) (z_2 + B) \subset \alpha A + (1 - \alpha) A = A, \end{aligned}$$

что и означает  $\alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 \in A \underline{*} B$ .

б) Пусть  $A, B, A_1, B_1$  — выпуклые множества, причем  $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ . Тогда

$$A \underline{*} B \subset A \underline{*} B_1, \quad (4)$$

$$A_1 \ast B \subset A \ast B. \quad (5)$$

Докажем включение (4). По определению, имеем  $(A \ast B) + B \subset A$ . Так как  $B_1 \subset B$ , то  $(A \ast B) + B_1 \subset A$  и, следовательно,  $(A \ast B) \subset A \ast B_1$ . Аналогично доказывается включение (5).

в) Пусть  $A, B$  — выпуклые подмножества из  $R_n$ , причем  $A$  — замкнуто. Тогда  $A \ast B$  является замкнутым множеством.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  точек из  $A \ast B$  и пусть  $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ .

Поскольку  $z_n + b \in A$  при любом  $n$  и любом элементе  $b \in B$ , то в силу замкнутости  $A$  имеем  $z_0 + b \in A$  при любом  $b$  из  $B$ , т. е.  $z_0 \in A \ast B$ . Следовательно, множество  $A \ast B$  замкнуто.

г) Пусть  $A$  и  $B$  — замкнутые выпуклые подмножества из  $R_n$ , причем  $B$  — компактно. Тогда

$$\delta^*(\lambda, A \ast B) \leq \delta^*(\lambda, A) - \delta^*(\lambda, B), \quad \lambda \in R_n. \quad (6)$$

Здесь  $\delta^*(\lambda, C) = \sup_{x \in C} \lambda'x$  — опорная функция выпуклого множества  $C$ .

Доказательство. Так как  $(A \ast B) + B \subset A$ , то  $\delta^*(\lambda, (A \ast B) + B) \leq \delta^*(\lambda, A)$  для всех  $\lambda \in R_n$ . Кроме того,  $\delta^*(\lambda, (A \ast B) + B) = \delta^*(\lambda, A \ast B) + \delta^*(\lambda, B)$ . Подстановка этого соотношения в предыдущее неравенство приводит к (6).

д) Пусть  $A$  — замкнутое выпуклое множество, а  $B$  — выпуклый компакт. Тогда

$$(A + B) \ast B = A. \quad (7)$$

Доказательство. Так как  $A + B \subset A + B$ , то  $A \subset (A + B) \ast B$ . Докажем теперь обратное включение. Обозначим  $F \triangleq (A + B) \ast B$ . В силу свойства г) имеем

$$\delta^*(\lambda, F) \leq \delta^*(\lambda, A + B) - \delta^*(\lambda, B) = \delta^*(\lambda, A), \quad \lambda \in R_n,$$

откуда следует  $F \subset A$ .

е) Пусть  $A, B$  и  $C$  — выпуклые подмножества из  $R_n$ . Тогда

$$(A \ast B) + C \subset (A + C) \ast B. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть  $z \in (A \ast B) + C$ . Тогда  $z = x + y$ , где



$$x \in A * B, \quad (9)$$

$$y \in C. \quad (10)$$

Из (9) в силу определения геометрической разности следует

$$x + B \subset A. \quad (11)$$

Складывая (10) и (11), получаем

$$z + B \subset A + C,$$

что означает

$$z \in (A + C) * B.$$

Следовательно, включение (8) доказано.

Пусть  $\Omega(R_n)$  — совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства  $R_n$ ,  $S$  — единичный шар в  $R_n$ . Для любых  $X, Y \subset \Omega(R_n)$  положим

$$\rho(X, Y) = \inf \{t \geq 0 : X \subset Y + tS, Y \subset X + tS\}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что

$$\rho(X, Y) = \max \{ \max_{x \in X} \rho(x, Y), \max_{y \in Y} \rho(y, X) \}.$$

Покажем, что функция  $\rho$ , определенная на  $\Omega(R_n) \times \Omega(R_n)$  соотношением (12), удовлетворяет аксиомам метрики:

1) Из определения следует, что  $\rho(X, Y) \geq 0$  для всех  $X, Y \in \Omega(R_n)$ . Предположим, что  $\rho(X, Y) = 0$ . Это эквивалентно справедливости включений  $X \subset Y$  и  $Y \subset X$ , что означает  $X = Y$ . Обратно, если  $X = Y$ , то равенство  $\rho(X, Y) = 0$  очевидно.

2) Симметричность функции  $\rho$ , т. е. справедливость соотношения  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ , очевидна.

3) Докажем свойство треугольника:

$$\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y).$$

Обозначим  $a = \rho(X, Z)$ ,  $b = \rho(Z, Y)$ . По определению (12), имеем

$$X \subset Z + aS, Z \subset X + aS, Z \subset Y + bS, Y \subset Z + bS.$$

Отсюда

$$X \subset Y + (a + b)S \text{ и } Y \subset X + (a + b)S.$$

Следовательно,

$$\rho(X, Y) \leq a + b = \rho(X, Z) + \rho(Z, Y),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция  $\rho$  задает на множестве  $\Omega(R_n)$  метрику. Обычно ее называют *метрикой Хаусдорфа*.

Без доказательства приведем следующий результат, известный как

**Теорема Бляшке.** Пусть  $G$  — компакт в  $R_n$ . Тогда  $\Omega(G) = \{X \in \Omega(R_n) \mid X \subset G\}$  есть компактное подмножество метрического пространства  $\Omega(R_n)$ .

Рассмотрим теперь непрерывное отображение  $X(t)$  действительной прямой в метрическое пространство  $\Omega(R_n)$ . Пусть  $p$  и  $q$  — действительные числа,  $p \leq q$ :

$$Q = \{t_0 = p, t_1, \dots, t_k = q\}, \quad t_0 < t_1 < \dots < t_k.$$

Определим сумму

$$\Sigma(Q) = \sum_{i=1}^k X(\tau_i) (t_i - t_{i-1}),$$

где  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Предположим далее, что  $X(t)$  есть выпуклое множество при любом  $t \in [p, q]$ . Тогда  $\Sigma(Q)$  есть выпуклое компактное множество, причем  $\Sigma(Q)$  зависит от разбиения  $Q$  отрезка  $[p, q]$ . Обозначим  $\delta(Q) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - t_{i-1}|$ .

Оказывается, что существует компактное выпуклое множество  $Y(p, q)$  такое, что расстояние  $\rho(Y(p, q), \Sigma(Q))$  стремится к нулю вместе с  $\delta(Q)$ . Это предельное множество  $Y(p, q)$  называется *интегралом отображения*  $X(t)$  и обозначается символом

$$Y(p, q) = \int_p^q X(t) dt.$$

При этом оказывается, что  $Y(p, q) \in \Omega(R_n)$  есть непрерывная функция пределов интегрирования  $p$  и  $q$ .

*Свойства интеграла (без доказательства):*

А. Если  $r$  удовлетворяет неравенству  $p \leq r \leq q$ , то

$$\int_p^r X(t) dt + \int_r^q X(t) dt = \int_p^q X(t) dt.$$

Б. Интеграл  $\int_p^q X(t) dt$  совпадает с множеством всех точек  $y$  вида  $y = \int_p^q x(t) dt$ , где  $x(t)$  — измеримая функция переменного  $t$  со значениями в пространстве  $R_n$  такая, что  $x(t) \in X(t)$ ,  $t \in [p, q]$ .

**3. Решение дифференциальной игры.** Вернемся к дифференциальной игре, сформулированной в п. 1. Относительно терминального множества игры предположим, что  $M$  есть векторное подпространство пространства  $R_n$ . Через  $L$  обозначим ортогональное дополнение подпространства  $M$  в  $R_n$ , а через  $\pi$  — операцию ортогонального проектирования пространства  $R_n$  на подпространство  $L$ . Положим

$$U(t) = -\pi e^{tA} B U, \quad V(t) = \pi e^{tA} C V$$

и предположим, что множество  $S(t) = U(t) * V(t)$  имеет размерность, равную размерности  $L$  при всех  $t \geq 0$ .

Запишем решение уравнения (1) с начальным условием

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{sA} [B u(t-s) + C v(t-s)] ds.$$

Положим, далее,

$$W(t) = \int_0^t S(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Символом  $T(x)$  обозначим минимальное значение  $t$ ,  $t \geq 0$ , при котором справедливо включение

$$\pi e^{tA} x \in W(t).$$

Если такого  $t$  не существует, то положим  $T(x) = +\infty$ . Заметим, что  $T(x) = 0$  только для  $x \in M$ .

Следующая теорема раскрывает содержательный смысл определения  $T(x)$ .

**Теорема 1.** Если  $T(x_0) < +\infty$ , то, какое бы измеримое управление  $v(t) \in V$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$ , не применял игрок  $P_2$ , у  $P_1$  найдется такое измеримое управление  $u(t) \in U$ , что  $x(T(x_0)) \in M$ , где  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , — соответствующее  $u(t)$  и  $v(t)$  решение системы (1).

**Доказательство.** Так как  $T(x_0) < +\infty$ , то

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 \in W(T(x_0)).$$

Следовательно, существует измеримая функция  $w(t)$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$ , такая, что

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 = \int_0^{T(x_0)} w(t) dt, \quad (14)$$

причем  $w(t) \in S(t)$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$ .

В силу определения геометрической разности последнее включение означает, что

$$w(t) + \pi e^{tA} C V \subset -\pi e^{tA} B U, \quad 0 \leq t \leq T(x_0).$$

Отсюда следует, что для любой измеримой функции  $v(t) \in V$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$ , найдется измеримая функция  $u(t) \in U$ ,  $0 \leq t \leq T(x_0)$ , такая, что

$$w(t) = -\pi e^{tA} B u(T(x_0) - t) - \pi e^{tA} C v(T(x_0) - t), \\ 0 \leq t \leq T(x_0).$$

Значит, из (14) имеем

$$\pi e^{T(x_0)A} x_0 + \int_0^{T(x_0)} \pi e^{tA} (B u(T(x_0) - t) + C v(T(x_0) - t)) dt = 0,$$

что эквивалентно включению

$$x(T(x_0)) \in M,$$

где  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , — решение системы (1), соответствующее управлениям  $u(t)$  и  $v(t)$ . Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что если  $\varepsilon$  — стратегия игрока  $P_2$  такова, что  $\varepsilon_1 \geq T(x_0)$ , то игрок  $P_1$  всегда может закончить игру не позднее чем за время  $T(x_0)$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $\varepsilon$ -стратегия игрока  $P_2$  такова, что  $\varepsilon_1 < T(x_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $T(x_0) < +\infty$ . Какое бы измеримое управление  $v(t) \in V$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , не применял игрок  $P_2$  на промежутке времени  $[0, \varepsilon_1]$ , у игрока  $P_1$  найдется такое измеримое управление  $u(t) \in U$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , что  $T(x(\varepsilon_1)) < T(x_0) - \varepsilon_1$ , где  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , — решение системы (1), соответствующее управлениям  $u(t)$  и  $v(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ .

**Доказательство.** Так как  $T(x_0) < +\infty$ , то множество значений  $t_1 \geq 0$ , при которых включение

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1 + \varepsilon_1) \quad (15)$$

имеет место, не пусто. (Включение (15) справедливо при  $t_1 = T(x_0) - \varepsilon_1$ .)

Запишем (15) в эквивалентной форме

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} S(t) dt. \quad (16)$$

Так как  $S(t) + V(t) \subset U(t)$  для всех  $t$ , то

$$\int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} S(t) dt + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} V(t) dt \subset \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} U(t) dt.$$

Прибавляя к обеим частям (16) интеграл  $\int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} V(t) dt$  и используя последнее включение, получаем

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} V(t) dt \subset W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} U(t) dt.$$

Подставим теперь в этом включении вместо второго члена в левой части один из его элементов, а именно

$$\pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} C v(\varepsilon_1 - s) ds,$$

где  $v(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , — управление игрока  $P_2$  на промежутке  $[0, \varepsilon_1]$ . Тогда

$$\pi e^{(t_1 + \varepsilon_1)A} x_0 + \pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} C v(\varepsilon_1 - s) ds \in W(t_1) + \int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} U(t) dt. \quad (17)$$

Выберем минимальное значение  $t_1$ , для которого (17) имеет место, и сохраним за ним обозначение  $t_1$ . Очевидно,  $t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ . Кроме того, существует определенный элемент множества  $\int_{t_1}^{t_1 + \varepsilon_1} U(t) dt$ , для которого включение (17) сохраняется. Запишем этот элемент в виде

$$- \pi e^{t_1 A} \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} B u(\varepsilon_1 - s) ds,$$

где  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , — измеримая функция, подчиненная условию  $u(t) \in U$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , и выберем эту функцию в ка-

честве управления игрока  $P_1$  на отрезке  $[0, \varepsilon_1]$ . Тогда из (17) получим

$$\pi e^{t_1 A} (e^{\varepsilon_1 A} x_0 + \int_0^{\varepsilon_1} e^{sA} (Bu(\varepsilon_1 - s) + Cv(\varepsilon_1 - s)) ds) \in W(t_1)$$

или, иначе,

$$\pi e^{t_1 A} x(\varepsilon_1) \in W(t_1),$$

где  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ , — решение системы (1), соответствующее управлениям  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon_1$ .

Из последнего включения следует, что

$$T(x(\varepsilon_1)) \leq t_1 \leq T(x_0) - \varepsilon_1.$$

Теорема доказана.

Утверждения теорем 2 и 1 позволяют по любой  $\varepsilon$ -стратегии игрока  $P_2$  и любой начальной точке игры  $x_0$ , такой что  $T(x_0) < +\infty$ , последовательно строить управление игрока  $P_1$ , приводящее точку  $x$  на подпространство  $M$  не позднее чем за время  $T(x_0)$ . Действительно, по заданному на отрезке  $[0, \varepsilon_1]$  управлению  $v(t)$  игрока  $P_2$  игрок  $P_1$  может построить в силу теоремы 2 управление  $u(t)$ , переводящее к моменту  $\varepsilon_1$  точку  $x$  в состояние  $x(\varepsilon_1)$  такое, что  $T(x(\varepsilon_1)) \leq T(x_0) - \varepsilon_1$ . Далее становится известным управление  $v(t)$  игрока  $P_2$  на отрезке  $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ . Снова, рассуждая, как раньше, найдем управление  $u(t)$  игрока  $P_1$  на отрезке  $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ , такое, что соответствующая ему точка  $x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  траектории  $x(t)$  в момент  $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  удовлетворяет неравенству  $T(x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \leq T(x(\varepsilon_1)) - \varepsilon_1 \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ . Повторяя этот процесс дальше шаг за шагом, в некоторый момент  $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$  придем в состояние  $x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$ , такое, что  $T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq T(x_0) - (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)$  и  $T(x(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k)) \leq \varepsilon_{k+1}$ . В силу теоремы 1 игрок  $P_1$  может закончить теперь игру в некоторый момент  $t^* \leq T(x_0)$ .

Итак, в классе  $\varepsilon$ -стратегий игрок  $P_1$  может завершить игру, начавшуюся в любой точке  $x_0$ , такой, что  $T(x_0) < +\infty$ , за время  $t^*$ , не превосходящее  $T(x_0)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач.— М.: Изд-во МГУ, 1974.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.

3. Красовский Н. Н. Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.

5. Лионс Ж.—Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.

6. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.

7. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования.— Мат. сб. 1980, т. 112 (154), № 3 (7), с. 307—330.

8. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 1, с. 65—78.

9. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.

**Габасов Р., Кириллова Ф. М.**

**Г 12** Методы оптимизации: [Учеб. пособие для ун-тов по спец. 0647 «Прикл. математика»].— 2-е изд., перераб. и доп.— Мн.: Изд-во БГУ, 1981.—350 с., черт.

В пер.: 85 к.

Во втором издании пособия (первое вышло в 1975 г.) усовершенствованы доказательства ряда теорем, детально разработаны разделы по актуальным проблемам оптимизации, включен материал по методам оптимизации, нашедшим широкое применение в практике.

Рассчитано на студентов факультетов математического профиля. Может быть рекомендовано преподавателям, аспирантам, специалистам, работающим в области приложений математики.

**Г**  $\frac{20405-061}{M317-81}$  30—81

1704050000

**ББК 22.11**  
517



*Рафаил Габасов*  
*Фаина Михайловна Кириллова*

## **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Издание второе,  
переработанное и дополненное**

Редактор *Л. Г. Лепило*  
Оформление *А. В. Крюшкина*  
Младший редактор *Л. Ф. Степанова*  
Художественный редактор *Л. Г. Медведева*  
Технический редактор *В. П. Безбородова*  
Корректор *Л. В. Лебедева*

ИБ № 397

Сдано в набор 16.10.80. Подписано в печать 10.09.81.  
АТ 06799. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типографская № 1.  
Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л.  
18,48. Усл. кр.-отт. 18,48. Уч.-изд. л. 17,6. Тираж 4850 экз.  
Заказ 1524. Цена 85 к.

Издательство БГУ им. В. И. Ленина Минвуза БССР и  
Госкомиздата БССР. Минск, проспект Машерова, 11.

Ордена Трудового Красного Знамени типография изда-  
тельства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.



